Infinituaren erronka

J. Agirre Kolektiboa

Descartes, Leibniz, Spinoza eta Kantenganaino iritsita, matematikak eta filosofiak bide luze eta kordatua egin dute elkarrekin. Kantek berak matematika eta ezagutza orokorraren jatorriak Talesen izen mitikoaren pean lotu zituen. Filosofo hauentzat guztientzat argi dago matematikak ahalbidetu zuela ezjakite eta sineskeria ororekiko jatorrizko haustura. Matematikak mitoaren nagusitasuna apurtu zuen. Pentsamendu erromantikoak bestalde –eta Hegelek batez ere–, urte gutxiren buruan, bien banaketa ia erabatekoa gauzatu zuen. Artikulu honetan, klasikoen bideari jarraitu nahi izan diogu. Dena dela, filosofiak berak egiarik sortzen ez duela eta, azken atalean politikaren alorrera jo dugu ondorio interesgarririk aterako zelakoan. Zelangura ere, politika askatzailea aldizkakoa da beti, eta ez da inoiz denboraren gainetik dagoen kategoria filosofiko baten gauzatze edo mamitze historikoa.

From Descartes, Leibniz, Spinoza and Kant, mathematics and philosophy have made a long and difficult way together. Cant linked the origins of mathematics and general knowledge under the mythical name of Tales. To all these philosopher it is clear that mathematics have made possible the rupture with all ignorance and beliefs. Mathematics broke the supremacy of myths. On the other hand, romantic thought (and principally, Hegel), in few years, got the definitive separation of the two of them. In this article we have follow the classics way. Nevertheless, at the end of the article we have taken the subject of politics, hoping to reach to some interesting conclusion. Anyway, liberalizer politics are always temporal, and it is never the result of an historical maturing of a philosophical category.

> "La clarification définitive de la nature de l'infini est devenue nécessaire, non seulement pour les intérêts spécifiques des sciences particulières mais plutôt pour l'honneur de l'entendement humain lui-même."
>
> David Hilbert (1862-1943)

Greziar klasikoen ontologia, eta bereziki Aristotelesena, funtsean finitua zen (eta hala ere, jainkoen infinitutasunarekin bateragarri egiten zuten). Aristoteles, Eleako Zenonek planteaturiko higiduraren kontrako argudioak aztertu eta errefusatzen saiatu zen (*Fisika*-ren VI. liburuan). Zenonen argudioek garrantzi handiko arazoa agerian utzi zuten: espazio eta denboraren infinitu aktuala[1] kontsideratuz, ezinezkoa gertatzen da edozein distantzia edo denbora zeharkatzea. Aristotelesek infinituak edozein errealitate izan zezakeenik ukatu zuen, edo materia potentzialaren negatibitate hutsarekin identifikatu zuen, balizko hutsarekin, hots, forma duen eta pentsatua izan daitekeen edozeren antitesia bailitzan.

Zenonen lau argudioek dilemaren itxura dute. Lehengo biak (Akiles eta dortoka, eta Dikotomia) jarraipenaren eta denbora zein espazioaren jarraikortasunaren eta infiniturainoko zatigarritasunaren kontra doaz; beste biak (gezia eta estadioa) espazioa eta denbora elementu zatiezinez osatuta daudela dioen hipotesi finitistaren kontra. Gogora ditzagun, banan-banan, laburki:

a) Dikotomia

Higidura ezinezkoa da zeren eta objektu mugikorrak bere ibilbidearen helmugara heldu baino lehen, distantziaren erdia bete behar izan du, eta lehenago laurdena... eta horrela infinituraino; hots, beste hitz batzuekin esanda, higidurak elementu infinituen sintesia edo batuketa inplikatzen du.

b) Akiles eta dortoka

Higidura ezinezkoa da zeren eta korrikalari arinago batek ezin izango du inoiz geldoagoa harrapatu. Izan ere, dortokak –aurretik joanez– higiduraren hasieran zatitxo bat aurreratzen baldin badu, Akiles, hura harrapatu baino lehen, besteak higiduraren hasieran ibilitako puntura iritsi beharko da. Dortokaren abantaila, egia da, gutxituz joango da, baina ez da inoiz deuseztatuko. Gaurko terminologian honela itzul daiteke: 1. Gorputz bakoitzak puntu-kopuru infinitua zeharkatu behar du; 2. Akilesen ibilbidearen puntu bakoitzari apur bat aurretik doan dortokaren ibilbidearen puntu bat dagokion legez eta alderantziz, puntuen kopurua nahitaez berdina izan behar da. Beraz, ezinezkoa da denbora berean Akilesek egindako bidea Dortokak egindakoa baino handiagoa izatea.

c) Gezia

Hegaz doan gezia, bere ibilbidearen puntu eta une bakoitzean, geldi dago. Izan ere, hipotesi finitistaren arabera, denbora edo espazio-tarte oro elementu

1. Latinezko *actum*-etik. Etimologia bikoitza du. Aktua, filosofian, izakiak jadanik burutu duena; balizkoari, litzatekeenari, potentziari, kontrajarria. *Actualem* hitzak, gaurkotasuna adierazten du, existitzen dena. Aktualizazioa: Aristotelesen filosofian oinarrizko puntua: potentziatik aktura doan igarotze-prozesua.

zatiezinez osatuta dagoela onartzen badugu, gezia, denbora eta tarte osoan, geldi dago. Beraz, denbora eta espazioaren instante eta puntu zatiezinetan ezin da higidurarik egon. Edo bestela esanda: puntu geldi guztiak batuta ere ezin da higidura lortu.

d) Estadioa

Hiru lagun –*a*,*b* eta *c*– estadiora doaz. Bertara helduta, *a*-k ez du korrika egiteko gogorik eta tribunan jartzen da; *b* eta *c* berriz korrika hasten dira, estadioari bueltaka, baina *b* eskuinaldera eta *c* ezkerraldera. Buelta osoa emateko puntura iristen direnean *b*-k daraman abiadura *c*-ri bi aldiz arinagoa iruditzen zaio *a*-ri iruditzen zaiona baino. Beraz, higidura desberdina da, ikusten duenaren ikuspuntuaren arabera: ondorioz, ez da existitzen.

Gure ustez, Zenonen argumentazioa zehatza da. Laugarrena da, gaur egun, agian azaltzeko errazena. Erlatibitateak ongi erakutsi digu ez duela zentzu handirik zerbait mugitu egin dela esateak, “zeren arabera” egin duen gehitzen ez bazaio. Zenonen argudioek geometriaren oinarrizko planteamendu guztiak ukitzen dituzte; aritmetikan ere gauza bera gertatzen da, eta matematikan ezin da ezer egin paradoxa ospetsuekin topo egin gabe[2]. Eta hau guztia argudio horiek infinituaren beraren barne-korapiloetan errotuta daudelako gertatzen da. Izan ere, infinitua agertzen zaigun bakoitzean, berriro agertzen zaizkigu arazook, eta bereziki matematikan. Zeren eta infinituaren kontraesana konponezina dela onartuko bagenu, matematika guztiak gaitzetsi eta errefusatu beharrean egongo ginateke, eta ez soilik funtzioen teoria eta kalkulu infinitesimala, baita geometria euklidearra eta aritmetika osoa ere.

Erdi Arora etorrita, sarritan pentsatu izan da monoteismo kristauak finitismo greziarrarekin hautsi zuela. Aristotelesek infinituari egozten zion izaera negatiboa gainditu eta neoplatonismoak eraginda, batez ere maila metafisiko eta teologikoan, Plotino eta Proklok, Jainkoaren Batean, infinitu eta finituaren aldibereko presentzia onartu zuten. Humanismoaren hasieran, XV. mendean, Nikolaus Krebs-ek (gaztelaniaz Nicolás de Cusa izenarekin ezaguna) infinitu matematikoaren kontzeptu abstraktua eta Jainkoaren infinitutasun erreala bildu zituen. Krebs-en ideia hauek eragin handia izan zuten gero Giordano Brunorengan. Krebs-ek sinbolo ospetsua erabiltzen zuen giza adimenak ezagutzaren bila egin behar duen lan infinitua sinbolizatzeko: π zenbakiarena hain zuzen ere. Giza adimena poligono batekin konpara daiteke, eta honen aldeen kopurua etengabeki handituta zirkulu baten antza hartuz doa, baina sekula lortu gabe[3]. Giordano Brunok, bere aldetik, asko zor dio Krebs-en neoplatonismoari eta baita Kopernikori ere, eta bere ustez, infinitua da unibertso osoaren oinarria, eta Jainkoaren lan sortzaileak erabat zeharkatzen du. Infinituan kontrakoek bat egiten dute (*concidentia oppositorum*) zentroak eta periferiak, osoak eta parteek...

2. Ikus esaterako Noël 1893. Alexandre Koyré (1971): «On reconnaît facilement la ressemblance des idées de Noël avec celles de Leibniz et, bien entendu, d’Aristote». Ikus baita ere Bergson 1985; eta Bertrand Russelek (1903) azkenik, Zenonen paradoxak hizkuntza matematikoan idatzi eta adibide erraz batzuen bitartez goian esandakoa frogatzen du.

3. “Akitze-metodoa” (edo Antzinakoen metodoa) deitzen zaio prozedura honi. Dena dela, partzialki bederen Euklidesengandik bazetorren ere, Arkimedesek landu eta sakondu zuen gehienbat. Ikus Delahaye 1997: 51-59.

Monoteismo kristauan, nolabait behintzat, nahiz eta Jainkoari egotzi zaion infinituaren izena, ez dago finitismo grekoarekiko haustura berehalako eta erradikalik[4]. Mundu naturaletik harantzago hierarkikoki errepresentagarria den traszendentziak ez du sakonki ukitu izakiari buruzko pentsamendua. Diskurtso ontologikoaren antolakuntza jarraitu honen posibilitatearen oinarria pentsamenduaren aro metafisikoan egiten zen horretan dago, hots, izakiaren arazoa izaki gorenari lotuz, infinitua izaki-Jainkoa izanik, azpitik segitu duen izakiaren beraren pentsamenduak, funtsean, finitua izaten segi dezake. Jainkoaren infinitutasunak soilik izendatzen du izakia-bere-osotasunaren “eskualde” traszendente hori, non ez dakigun ere zein zentzutan garatzen den izakiaren funtsezko finitutasuna.

Heidegger-ek ontoteologia deitzen duen eremuan, hots izatearen pentsamenduak izaki[5] gorenarekiko duen menpekotasun metafisikoan, finitu eta infinituaren arteko diferentziak –izakian dagoen diferentzia, edo “diferentzia ontikoa” izanik– ez du, egia esan, ezertxo ere adierazten izakiaren beraren gainean, eta arazorik gabe manten daiteke Aristotelesen dispositibo finitua. Azkenik, infinitu/finitu bikoteak diferentzia ontologikoaren espazioan pertinentziarik ez izateak infinituaren teologia eta finituaren ontologia bateragarriak direla adierazten digu.

Beraz, Erdi Aroko Jainko infinitua, izakia den aldetik, guztiz finitua da. Horregatik hain zuzen ere, ez dago inongo labar gaindiezinik Bera eta sorturiko naturaren artean eta, ondorioz, bigarrenaren behaketa arrazoituak Haren existentziaren froga etengabea hornitzen digu. Bestalde, froga honen benetako eragilea –existentzia naturalarekin erabat lotuta dagoena–, higidura (finituak deitzen diren substantzia naturalei dagokiena) eta higiezintasunaren (Jainkoa den motore gorena aldaezina da) arteko diferentzian dago.

Infinituaren kontzeptu erabat modernoa, behin betiko eta erradikalki Aristotelesekin eta judu-kristauenarekin hautsi zuena, Galileo Galileiren interbentzioari zor diogu. Galileok infinitua naturan bertan dagoela ezarri zuenean, Descartesek berak Jainkoaren existentziaren froga aldatu behar izan zuen. Izatearen infinitutasunaren tesia filosofo kristauen geroztikoa da, edo nahi bada Galileoren ondorengoa, Galileo inflexio-puntua markatzen duen gertakizuna delarik. Galileoren infinituaren matematikak[6] eta Descartesen zientziaren subjektu berriak –*Cogito*-aren hutsunetik sortutakoa– biak barnetik lotuta egonik, pentsamendu grekoa behin betirako zapuztu eta deslerrokatu zuten infinitutasunaren beraren esentzia ontologiko finitua zen, eta Jainko gisa ezagutzen zen izakiaren nagusitasuna.

Honen guztiaren ondorioz, infinituari buruzko tesi erradikal oro ez da izango jadanik Jainkoari buruzkoa, naturari buruzkoa baizik. Pentsalari modernoen ausardia ez da izan infinituaren kontzeptua ezartzea, hori judu eta kristauek aspalditik

4. «On pourrait se demander toutefois si l’opposition entre le finitisme grec et l’infinitisme chrétien, sur laquelle insistent Duhem et tant d’autres, est aussi justifiée qu’ils le croient. On pourrait même soutenir le contraire» (Koyré 1971: 39).

5. *Seiendes*, *das Seiende* = *ens* = “den hori”, “dena”, “izakia”. Jean Wahl-ek, M. M. Lévinas-ek frantsesera “ce qui est” edo “étant” modura itzuli dute.

6. «...De i quali accidenti di gravità, di velocità, ed anco di figura, come variabili in modi infiniti, non si può dar ferma scienza: e però, per poter scientificamente trattar cotal materia, bisogna astrar da essi, e ritrovate e dimostrate le conclusioni astrate da gl’impedimenti, servir cene, nel praticarle, con quelle limitazioni che l’esperienza ci verrà insegnando» (*Discorsi. Giornata quarta*. 275. or.).

baitzeukaten pentsamendu grekoarekin itsatsita. Modernoen meritua kontzeptuaren erabilera deserdiratzean datza: natura infinitua da.

Edozelan ere, naturaren infinitutasunaren tesia soilik da azaletik munduari –edo unibertsoari– buruzko tesia; zeren eta "mundua" oraindik izan baitaiteke pentsatua –Kantek "antinomia ontologikoarekin"[7] frogatu zuen bezala– bataren-izakia bailitzan eta itxurazko *impassea* baino ez izan. Naturaren infinitutasunak munduaren infinitutasuna baino ez badu izendatzen, (Koyrék (1971) haustura modernoa ikusten duen "unibertso infinitua") oraindik da posible, hala ere, unibertso hori jainko deserdiratua, alde guztietatik banatua baino ez izatea, ontologiaren azpiegitura finitista tinko mantentzea, eta infinitutasun ontikoa bere estatutu traszendente eta pertsonaletik jaistea, espazio kosmologikoaren mesedetan. Baina horrela saihestu egiten da izakiaren funtsezko infinitutasunari buruzko enuntziatu erradikala. Ulertu beharra dago naturaren infinitutasunak soilik imajinarioki izendatzen duela Bat-munduaren infinitutasuna. Bere egiazko zentzua soilik doakio, bata ez baita, multiple edo anitz hutsari, presentazioari alegia.

Beraz, infinituaren kontzeptua ez da iraultzailea izan pentsamenduan, harik eta naturari zegokiola deklaratu zen arte, mundu guztiak somatu baitzuen hartan ordurarteko dispositibo ontoteologikoa bera kolokan jarri zuela. Astinketa honen ondorio zuzena arazo ontologikoaren berrirekitzea izan zen, Descartesengandik Kantenganaino ikus daitekeenez, egonezin guztiz berriak jo baitzion konbentzimendu finitistari. Infinitua naturala baldin bada, izaki gorenaren izen negatiboa ez bada, ezin pentsa ote genezake predikatu hori izakia-izaki-den-aldetik delakoari dagokiola? Eta beraz, anitzari edo multipleari berari? XVI. eta XVII. mendeetako iraultza intelektualak –hipotesiaren norabidetik abiatuta, ez izaki infinitutik, zenbaki infinituen multipletik baizik– izakiari buruzko galdera arriskugarria berrireki zuen, eta muntaia grekoaren uzte itzulezinezkoa prestatu.

Modurik abstraktuenean, ezer baino lehen, izakiaren infinitutasunaren ezagutzak egoerak infinituak direlako ezagutza ekarri zuen[8]. Hala eta guztiz ere, zer da multiple infinitu bat?

Nola edo hala, galdera honen erantzuna ez dago gaur oraindik argi. Bestetik, arazo intrintsekoki ontologikoaren –hots, matematikoaren– adibidea dugu berau. Ez dago infinituaren kontzeptu inframatematikorik; "oso handia"ren irudi lanbrotsuak[9] daude soilik. Gauzak horrela, ez dugu izakia infinitua dela esango, *bera*

7. Kantek lau proposamen kontraesankorreri *arrazoi hutsaren antinomien* izena eman zien. 1) Mundua mugatua da denboran eta espazioan / Mundua mugagabea da denboran eta espazioan. 2) Munduan dena da sinplea / Munduan dena da konposatua. 3) Askatasuna existitzen da eta zenbait efekturen hasiera absolutuaren posibilitatea izan daiteke / Munduan dena naturaren legeek behartuta gertatzen da. 4) Munduan izaki beharrezkoak existitzen du / Ez dago munduan beharrezkoa den ezer. Ikus Kant 1912: 149-159.

8. «...¿qué repugnancia hay en que el infinito, implicado en el simplicísimo e indivisible primer principio, no se encuentre explicado en este simulacro [universo] suyo, sin fin ni términos, capaz de mundos innumerables?» (Giordano Bruno in Gomez de Liaño 1997: 174).

9. Abraham Robinson eta Edward Nelsonek 60.eko hamarkadan asmatutako *No Standard Analysis* (NSA) delakoak, zenbaki errealak (**R**) irizpide ez oso zehatz baten arabera, banaketa berri batez sailkatu zituzten: arruntak, i-handiak eta i-txikiak. *Arruntak*: egunerokotasunean erabiltzen ditugunak, eta intuizio berehalakoan hauteman daitezkeen 1, 2, 3, 4.... *I-handiak*: "izugarri-handiak" edo "itzelezko handiak", 10^{100}, adibidez. Eta i-txikiak: "izugarri txikiak" edo "itzelezko txikiak", 0, esaterako. Guk NSA

soilik dela infinitua baizik. Edo areago, infinitua soilik izakia-izaki-den-aldetik delakoari dagokion predikatua dela. Orduan, infinituaren kontzeptu unibokoak soilik matematikan aurkitzen baditugu, kontzeptu hori soilik erabil dezakegu matematikak darabilen horretan, izakia-izaki-den-aldetik delakoari dagokionean. Puntu honetara helduta, ongi ulertzen dugu, Cantorren[10] lanak zein puntutaraino itxi zuen Galileoren keinu historikoa.

Infinituaren existentzi estatutua bikoitza da. Beharrezkoak dira jadanik-hor--dagoen hasierako anitza, eta Bestearen izakia; azken hau ezin da inoiz arautik inferitu. Infinituaren existentzi marka bikoitz hau funtsezkoa da infinitu erreala infinitu-bat den imajinariotik bereizteko.

Azkenik, esan behar dugu infinituak *izakiaren puntu baten*, *errepikapen--automatismoaren* eta *bigarren existentziaren markaren* arteko lotura gauzatzen duela. Infinituan lotzen dira jatorria, bestea eta Bestea. Bigarren existentzi markak infinitua finitutik imajinatzea debekatzen du. “Finitua” arau batek goitik behera zeharkatzen duen izate modura definitzen baldin badugu, puntu batean Bestea bestea bailitzan tratatzen baldin badu, argi dago infinitua ezin dela hortik inferitu, infinituak Bestea beste alde batetik etortzea eskatzen baitu, besteak antolatzen dituen arauetatik kanpo.

Hemendik berebiziko garrantzia duen enuntziatua ondorioztatzen dugu: izakiaren infinitutasunaren tesia erabaki ontologikoa da nahitaez, *axioma* bat alegia. Erabaki hau saihesten badugu, beti izango da posible izakia finitua izatea.

Egia biribila da XVI. eta XVII. mendeetako pentsalariek erabaki hori hartu zutela, natura infinitua dela erabaki zutenean. Hori ez zen posible izan behaketari esker, lente astronomiko berrien hobekuntzari esker... Beharrezkoa izan zen pentsamenduaren kuraiaren egintza garbi bat, beti defendagarria den finitutasun ontologikoaren dispositiboan eten halanahitakoa egitea.[11]

Historikoki mugatua izanik, izakiaren infinitutasunari dagokion enuntziatuaren era efektiboki ateologiko bakarrak naturarekin zerikusia duela ontologiak ere adierazi behar du.

Anitz, multiple edo multzo *naturalak* barnekotasunaren (banakako zenbaketa) eta partekotasunaren (estatuaren araubidea) arteko oreka maximoa burutzen dutenak dira. Infinituari dagokion erabaki ontologikoa, beraz, honela esango dugu: *anitz natural infinitua existitu egiten da.*

Azpimarratu behar dugu enuntziatu honek arretaz saihesten duela *Natura* aipatzea, oso nabaria delako oraindik bertan bat kosmologikoaren ordezko eremua, bat infinitu teologikoaren pean hainbeste mende egon ondoren. Jainkoa ez

---

honi kutsu erabat inframatematikoa ikusten diogu; Infinituaren kontzeptu zehatzaren ordez “irudi lanbrotsuak” proposatzen dituzte.

10. Cantorren aipamenetarako ik. Cantor 1980. Zenbait testu, handik eta hemendik hartutakoak, ingelesez ere badaude. Frantsesez, aipatzekoa da J.-C. Milner-ek *Fondements d’une théorie générale des ensembles* (1883) delakotik hartutako oinarrizko zatiak, *Cahiers pour l’analyse*, 69ko udaberriko 10. zenbakian. Gaztelaniaz bestalde, eta hau sintomatikoa da, ez dugu uste Cantorren ezer itzulita dagoenik. 1972tik hona ez, seguru.

11. «FILOTEO: No hay sentido que vea el infinito, no hay sentido al que se exija esta conclusión, porque el infinito no puede ser objeto del sentido» (Giordano Bruno in Gomez de Liaño 1997: 168).

da existitzen. Naturak ere ez. Aipatutako enuntziatuak soilik postulatzen du gutxienez anitz natural bat, anitz iragankorren anitz bat alegia, infinitua dela.

Eta hala ere, enuntziatu horrek okerrera eraman gaitzake, "infinitu" adjektiboa oraindik zehaztu ez dugulako. Honako hau hobets dezakegu: anitz natural bat existitzen da, horri arau bat dagokiolarik; eta arau honen arabera bere ariketaren edozein unetan, beti existituko da oraindik-beste-batek, baina bera ez da inoiz horietariko bat izango, nahiz eta horiek guztiak barnean dituen.

Enuntziatu honek zuhurregia dirudi, egiazta daitekeen edozein egoeratan multiple infinitu bakarra aurreikusten duelako. Ontologiari dagokio erabakitzea ea soilik bakarra dagoen, besterik egon daitekeenentz, besteen Bestea, eta abar.

Enuntziatu honek arriskutsua eta murriztailea dirudi, infinituaren kontzeptu bakarra baino ekoizten ez duelako. Ontologiari dagokio, berriz ere, multiple edo anitz infinitu bat existitzen baldin bada, beste batzuk ere existitzen direla frogatzea; eta horiek, arau zehatz baten arabera, neurtezinak dira.

Horrela aurkitzen dugu egituratuta izakiaren infinitutasun posiblea mantentzearen aldeko erabaki historikoa. Infinitutasun hori, bataren esparrutik, eta, beraz, Presentziaren edozein ontologiatatik kendua izan zenetik, ugalduz doa nonahi, ordezkatzeak toleratzen duena sobera gaindituz. Eta pentsamenduaren garai zaharra atzekoz aurrera modu ikusgarrian jarriz, finitua salbuespen gisa mantentzen du, bere haurridearteko behin-behinekotasuna gugandik hurbil soil-soilik behaketaren txirotasunak mantentzen duelarik.

Gizakia zeinutzat heriotza duen bere burua finitutasunean irudikatzea nahiago duen izakia da, infinituaren nonahitasunak inguratuta eta alderik alde zeharkatuta ikustea baino gehiago.

Gutxienez, ezerk ez duela hori aurkitzera behartzen jakinik kontsola dadila, gai honetan bederen, pentsamendua erabakiaren esparruan egon baitaiteke soilik.

1. *"Anitz naturaletan infinitua dago"* delako erabaki ontologikoa

Anitz naturalen eskema ontologikoa *ordinalaren* kontzeptua izanik, eta infinituaren izaerari buruzko erabakiaren historikotasuna "natura infinitua da" delako tesian markatuta dagoenez, orduan infinituaren axioma horrela idatzi behar da: "ordinal infinitua existitzen da". Axioma honek, nolanahi ere, ez du inolako zentzurik, eta zirkularra da. Infinitua bere izaeraren posizioan inplikatu du, baina ez du infinituaren ideia multzoen teoriaren hizkuntzan idatzi, eta horrela, anitzari buruz ditugun ideiekin bateragarria izan daitekeen formula predikatibo bihurtu du.

Bide bati behintzat ezin diogu jarraitu, infinitutasun naturala ordinalen *osotasun* bezala definitzen duenari alegia.[12] Erakutsi dugu jada horrela ulerturiko Naturak ez duela izaterik, zeren eta ordinal guztiak ordezkatuko lituzkeen balizko

12. Cantorrek (1845-1918) infinitu aktualaren aldeko apostua egin zuenean, infinitua osotasun modura asmatu zuen. Hala ere, berehala agertu zitzaizkion arazoak multzo paradoxikoak zirela-eta. Horiek saihesteko, Hilbertek proposaturiko irtenbide sinplea hartu dugu, hots, aldez aurretik teoriaren barruan multzo horien presentzia debekatzea; hala nola, horietako bat autobarnekotasunaren debekua

anitzak –beraz, forma naturala duten izaki posible guztiak– autobarnekotasunaren debekua nozitzen baitu, eta beraz, ez da existitzen. Onartu beharra dago, Kantekin batera, Osotasunaren ideia ontologikoa ez dela onargarria. Infinitua existitzen baldin bada, izaki natural bat, edo batzuen itxura izan behar du, baina ez Osotasun Handiarena. Infinituaren arloan –besteetan bezalaxe–, Presentazioaren emaitza den bat-anitzak osoak eta parteek eratzen duten mamurantz garamatza.

Ondoren agertzen zaigun oztopoa anitz naturalen eskema ontologikoaren homogeneotasunarena da. Infinitu/finitu oposizio koalitatiboak ordinalaren kontzeptua zeharkatzen baldin badu, IZAKI-ANITZ NATURALAREN BI MOTA –GUZTIZ DESBERDINAK– DAUDELAKO da. Beraz, puntu honetan zerbait erabaki beharrean baldin bagaude, desberdintasun espezifiko hori onartzea izango da erabakia. Eta erabaki horrek ordinalen definizioan haustura, hots, eten kontzeptuala non dagoen pentsatzera eramaten gaitu.

2. Izakiaren puntua eta ibilbidearen ebakitzailea

Infinituaren existentzia pentsatu ahal izateko, hiru gauza behar ditugu: izakiaren hasierako puntua, beste-berbera ekoizten duen araua, eta bigarren existentzi marka, Bestearen tokia bestearentzat finkatzen duena.

Ontologian guztiz hasierakoa den izakiaren puntua, hutsaren izena, ø, da. Eta berau, anitz natural baten izena ere izan daiteke, ezerk ez baitio hori eragozten. Bestalde, orain arte gorde dugun existentziari buruzko ideia bakarra da berau. Halaber, hutsaren izenetik aurrera onartu ditugun anitzak, {ø} esaterako, matematika eraikitzailearen[13] arabera dira onargarriak.

Anitz naturalen ibilbidearen arauak[14] baimendu behar digu, ø-tik aurrera, beste ordinal arruntak etengabe eraikitzea –beti "oraindik bat gehiago"–, hots, beste multzo iragankor batzuk eraikitzea, hauen elementuak ere iragankorrak direlarik, eta denak onargarriak anitz hutsaren presentazioaren ideia axiomatikoen arabera.

Gure euskarria Biaren irudia izango da, {ø,{ø}} anitza alegia, honen elementuak hutsa eta bere "singletona" edo "bakuna"[15] direlarik. Ordezkapenaren

---

dugu. «En fait, la définition classique d'un ensemble donnée par Cantor –'un ensemble est un groupement en un *tout* (etzana gurea da) d'objets bien distincts de notre intuition et de notre pensée'– n'est pas suffisamment précise pour échapper aux difficultés rencontrées avec certains ensembles. (...) Pour Hilbert, il faut d'abord court a la recrudescence des paradoxes qui produisent des effects dévastateurs sur la théorie des ensembles, de ces 'ensembles' (qui sont en fait trop 'gros') posant problème» (Verdier 1997: 53-55).

13. Matematika eraikitzailea: erabiltzen dituen objektuak algoritmoen bidez eraikitzen saiatzen da. Matematikari formalistentzat, adibidez, "existitzeak" "teoriaren axiomekin kontraesanean ez egotea" esan nahi du. Hau ez da nahikoa eraikitzaileentzat. Hauentzat "existitzeak" "algoritmoen bitartez eraiki ahal izatea" esan nahi du. Joera matematiko honen jarraitzaileak dira, adibidez, Estatu Batuetan Bishop-en eskolakoak, eta Errusian Markov-en eskolakoak.

14. Zenbaki naturalen (zenbaki osoak eta positiboak: 0, 1, 2, 3, 4...), **N**-ren eraiketa axiomatikoa Giuseppe Peano-ri zor diogu. Lehen axioma: 0 zenbaki bat da; bigarrena: edozein zenbakiren segitzailea zenbaki bat da (bildura-printzipioa)...; bosgarrena: 0 ez da inongo zenbakiaren segitzailea. Gaztelaniara itzulita dago (Peano 1979).

15. ß delako multzo baten singletona edo bakuna, ß delakoa elementu bakartzat duen multzoa da. Honela idazten da: {ß}.

axiomak hauxe dio: bi hori existitzen delarik, beste edozein multzo ere existitzen da, bi elementu horien ordez beste bi –balizko existentzia dutenak– ipiniz lortzen dena. Horrela lortzen dugu Biaren kontzeptu abstraktua: α eta β existitzen baldin badira, $\{\alpha, \beta\}$ multzoa ere existitzen da, bere elementu bakarrak α eta β direlarik (existitzen den Bian, ø-ren ordez α; eta {ø}-ren ordez β). $\{\alpha, \beta\}$ deituko diogu α eta β-k osatutako *bikoteari*. Horrela bada, α eta β "bikotetu" egin ditugu.

Bikotea lortu ondoren, goazen multzoak batzen dituen operazio klasikoa definitzera, hots $\alpha \cup \beta$ zeinaren elementuak α-renak eta β-renak "elkarrekin ipinita" lortzen diren. Demagun $\{\alpha, \beta\}$ bikotea. Bilduraren axiomak hauxe agintzen du: daukagun multzo baten elementuen elementu-multzoa existitzen da. $\{\alpha, \beta\}$ bikotea existitzen baldin bada, bere bildura $\cup\{\alpha, \beta\}$ ere existitzen da, eta dauzkan elementuak bikotearen elementuak dira, α eta β-ren elementuak alegia. Hauxe da nahi genuena. Proposatuko dugu orain $\alpha \cup \beta$, $\cup\{\alpha, \beta\}$ adierazteko idazkera kanonikoa baino ez dela. Eta oraintsu ikusi dugun legez, α eta β existitzen badira, $\alpha \cup \beta$ ere existitzen da.

Beraz, gure ibilbidearen araua hauxe izango da:

$$\alpha \rightarrow \alpha \cup \{\alpha\}$$

Arau honek emandako ordinal batetik aurrera, bera eta bere bakunaren bildura-multzoa "ekoizten" du. Bildura honen elementuak alde batetik α-renak dira, eta bestetik α berbera, bere bakunaren elementu bakarra delako. Beste era batera esanda: α-ri bere izena biltzen diogu, edo: α-k aurkezten dituen anitzei bera den bat-anitza biltzen diegu.

Kontura gaitezen prozedura honekin "beste bat" ekoizten dugula. Izan ere, duela gutxi esan dugu, α, $\alpha \cup \{\alpha\}$-ren elementua dela. Alabaina, bera ez da α-ren elementu, $\alpha \in \alpha$ debekatuta baitago. Orduan, α eta $\alpha \cup \{\alpha\}$ diferenteak dira zabalkortasunaren axiomaren arabera. Diferentzia anitz batean datza, α-rengan hain zuzen ere.

Hemendik aurrera, $\alpha \cup \{\alpha\}$, modu honetan idatziko dugu: $S(\alpha)$, eta honi α-ren *hurrena* deituko diogu. Gure arauak ordinal batetik bere hurrenera "pasarazten" digu.

Hurrena den *beste* hori, *berbera* da baita ere, ordinal baten hurrena beste ordinal bat delako zentzuan (Peano). Beraz, gure araua anitz naturalentzako inmanentea den ibilbide-araua da. Erakuts dezagun.

Alde batetik, $S(\alpha)$-ren elementuak denak iragankorrak dira. Izan ere, α ordinal bat izanik, bai bera eta bai bere elementuak iragankorrak dira. Alabaina, $S(\alpha)$-ren osagaiak, hain justu, α-ren elementuak dira, ondoren α bera gehitzen zaiela.

Alde batetik, $S(\alpha)$ ere iragankorra da. Izan ere, demagun $\beta \in S(\alpha)$ dela.

- Edo $\beta \in \alpha$, eta ondorioz $\beta \subset \alpha$ (α iragankorra delako).

Baina $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ den legez, orduan argi dago $\alpha \subset S(\alpha)$ dela. Eta parte baten partea ere partea den legez, honakoa dugu: $\beta \subset S(\alpha)$.

• Edo $\beta = \alpha$, eta orduan $\beta \subset S(\alpha)$, zeren $\alpha \subset S(\alpha)$ baita.
Halaber, $S(\alpha)$ren *barne* [$\in$] den anitz oro, bere *parte* [$\subset$] ere bada. Beraz, $S(\alpha)$ iragankorra da.

Anitza iragankorra izanik bere elementu guztiak ere iragankorrak dira. $S(\alpha)$ ordinala da (α bera ordinala den unetik).

Gainera, badu zentzurik α-ren hurrena $S(\alpha)$ dela esateak, edo α-ren "ondo--ondotik" datorren ordinala –oraindik-bat-gehiago delakoa– dela. Inongo β ordinalik ezin da txertatu α eta $S(\alpha)$-ren "bitartean". Zeren arabera gertatzen da hau? Barnekotasuna osotasunaren alorreko harremana da ordinalen artean. Beste modu batera esanda, ez dago $\alpha \in \beta \in S(\alpha)$ beteko lukeen inolako β moduko ordinalik.

Zeren eta, $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$-ean, "$\beta \in S(\alpha)$" enuntziatuak hauxe adierazten baitu:

- Demagun $\beta \in \alpha$. Honek $\alpha \in \beta$ baztertzen du, barnekotasuna ordinalen artean ordena-harremana izanik, iragankorra baita, eta bai $\beta \in \alpha$-tik bai $\alpha \in \beta$-tik, $\beta \in \beta$ aterako litzateke, eta hori ezinezkoa baita.
- Demagun $\beta \in \{\alpha\}$. Honek $\beta = \alpha$-ra eramaten gaitu, α, $\{\alpha\}$ singletonaren elementu bakarra delarik. Baina $\beta = \alpha$ berdintzak baztertu egiten du nabarmenki, betiere autobarnekotasunaren debekua dela eta.

Kasu guztietan ezinezkoa da α eta $S(\alpha)$-ren bitartean β tartekatzea. Horrela bada, jarraipen-araua unibokoa da. Eta horren bitartez α delako ordinal batetik bakarra den beste horretara pasa gaitezke, eta hori hurrengoa da, barnekotasuna den harreman osoaren arabera.

Izakiaren hasiera-puntua den ø-tik hasita, *existitzen* (ø existitu egiten baita) diren ordinalen sekuentzia, beraz, honelaxe eraiki dezakegu:

$$ø, S(ø), S(S(ø)),... S(S(...(S(ø))...),...$$

Intuizioak berehala esaten digu, modu egokian "ekoitzi" dugula ordinalen kopuru infinitua, eta, beraz, infinitutasun naturalaren alde erabaki dugula.

Dena dela, hori Osoaren ospe imajinarioaren aurrean makurtzea litzateke. Ikusi dugun bezala, filosofo klasikoek argi ikusi zuten arauaren efektuaren errepikapen honetan soilik lortzen genuela beste-berdinen mugagabetasuna[16], baina ez existitzen den infinitua.

Bestalde, horrela lortutako ordinal *bakoitza* nabarmenki finitua da zentzu intuitiboan. Hutsaren izenaren *n*-garren hurrengoa izanik, *n* elementu ditu, denak bakoiztasunaren errepikapenaren bidez huts soilarekin ehunduta. Bestalde, anitz soilaren inongo ideia axiomatikok ez digu baimentzen jarraipen-arauaren bidez lor ditzakegun ordinal *guztiekin* bat egitea. Horietariko bakoitza etorriko den oraindik-

16. «Il est impossible, affirme-t-on, de 'compendre' l'infini, c'est-a-dire de considérer comme actuel le non-achevé, de concevoir comme accomplie et terminée une division qui progresse à l'infini. Nous croyons, pour notre part, que les contradictions apparentes résultent de deux confusions, à savoir l'identification de l'indefini avez l'infini et l'application de concepts finitistes –tels que l'egalité numerique– à l'infini» (Koyré 1971: 25).

-bat-gehiago horren arabera existitzen da, bere bestea izatea, atzera begira berbera modura kalifika baitaiteke, nahiz eta arauaren errepikapenaren ertzean berak mantentzen duen besteen-arteko-bat hori izan. Baina Osoa eskuraezina da. Badago hor soilik erabaki baten bidez zeharka daitekeen amildegia.

3. Jarraipena eta limitea

Jarraipen-arauetan oinarrituta beren existentzia oinarritzen duten ordinalen artean, badago bat, ø, apartekoa dena alde guztietatik begiratuta ere, baina hori soilik ontologia osoarentzat horrela den neurrian. Sekuentzian zehar, ø ez diren ordinal guztiak beste baten hurrengoak dira (Peanoren bosgarren axioma). Modu guztiz orokorrean esango dugu, α delako ordinala ordinal segitzailea dela –guk horrela idatziko dugu: S (α)– baldin eta berak segitzen duen beste ordinal bat, β adibidez, existitzen bada. Horrela formulatuko genuke:

$$S(\alpha) \leftrightarrow (\exists\beta)\ [\alpha = S(\beta)]$$

Ordinal segitzaileen existentzia ez dago zalantzan. Infinituarekin zerikusia duen erabaki ontologikoan jokatuko duen arazoa, ordea, hauxe da: ordinal ez segitzaileen existentzia. α ordinal bat limitea dela esango dugu, eta lim (α) idatziko dugu, inongo β-ren segitzailea ez denean:

$$\lim (\alpha) \leftrightarrow \sim S(\alpha) \leftrightarrow \sim (\exists)\ [\alpha = S(\beta)]$$

Ordinal limite baten –horrelakorik existitzen baldin bada– barne-egitura funtsean ordinal segitzaile baten desberdina da. Eta hor aurkitzen dugu guk ez--jarraipen koalitatiboa anitz naturalen azpiegitura ontologikoaren unibertso homogeneoan; eta infinituaren apostuak ez-jarraipen horretara garamatza, ordinal limiteak Bestearen lekua betetzen baitu, bere barnean dauden beste-berberen jarraipenarentzat.

Puntu erabakigarria hauxe da: ordinal bat ordinal limite baten barnean ($\in$) baldin badago, bere segitzailea ere haren barnean dago. Izan ere, baldin $\beta \in \alpha$ (demagun α limitea dela) bada, ezin dugu izan $\alpha \in S(\beta)$, zeren eta orduan α, β eta $S(\beta)$-ren artean tartekatuta bailegoke, eta hori ezinezkoa dela erakutsi dugu apur bat lehenago. Eta ezin dugu ezta ere $S(\beta) = \alpha$ egin, zeren eta α, ordinal limitea izanik, ez da inongo ordinalen segitzailea. Eta barnekotasuna ordinalen artean ordena osoa denez, $\alpha \in S(\beta)$ eta $\alpha = S(\beta)$-ren ezintasunak beste hau inposatzen digu, hots, $S(\beta) \in \beta$.

Kontsidero honetatik ondokoa ondoriozta dezakegu: ordinal limite baten eta bere barnean dagoen β delako ordinal baten artean, ordinalen kopuru infinitua (zentzu intuitiboan[17]) tartekatzen da. Izan ere, baldin $\beta \in \alpha$ (eta α da limite) bada orduan $S(\beta) \in \alpha$, eta $S(S(\beta)) \in \alpha$, eta horrela jarraian... Ordinal limitea orduan Bestearen lekua da, eta bertan, jarraipenaren bestea bere burua inskribatzen saiatzen da berriro ere. S arauaren bidez eraiki daitezkeen segitzaile jarraien sekuentzia osoa ordinal limite horren “barruan” bilakatzen da, hots, sekuentziaren termino guztiak bere barnekoak dira. Hala ere, ordinal limitea bera Bestea da, eta ezin du sekula beste baten jarraian datorren *beste-bat-gehiago* izan.

17. Intuizionismoa: intuizio hautemangarria arrazonamenduaren aurretik ipintzen duen filosofia matematikoa. Kantengan du bere oinarri filosofiko nagusia.

Aipa dezagun baita ere, egiturari dagokionez, ordinal segitzaileek eta ordinal limiteek duten beste diferentzia: lehenbizikoek beren baitan anitz maximoa dute, bigarrenek aldiz, ez. Horrela bada, segitzaile bat baldin badugu, eskema ontologiko "ordinala" guztiz hierarkizatuta dagoen anitz natural bati dagokio, eta bertan, inmanenteki, eta anbiguotasun-izpirik gabe, termino meneratzailea izendatuko da. Ordinal limitea baldin bada ordea, izaki-azpiegitura eratzen duen anitz naturala "irekia" da, eta bere barne-antolaketak ez dauka inolako termino maximorik, inolako itxidurarik. Ordena hau ordinal limiteak menperatzen du, baina kanpotik, bere buruaren barnean egon gabe; bera limitea den sekuentzian existitzen da[18].

Ordinal segitzaile eta ordinal limiteen artean soma daitekeen ez-jarraipena honelaxe labur daiteke azkenik: lehenbizikoak, segitzen duten lehen ordinal *bakar* horrek mugatzen ditu; bigarrenak berriz, aurretik ibilitako ordinalen sekuentzia "oso" baten ondoren marka daitezke soilik, nahiz eta, arauaren arabera, sekuentzia hori osaezina izan. Ordinal segitzaileak ordinal txikiagoekiko ("txikiagoak" beraien barnean daudela esan nahi du) estatutu *lokala* dute; izan ere, beraien arteko baten segitzaileak dira. Ordinal limiteak berriz, estatutu *globala* du, txikiagoak diren horien artetik bat-bera-ere-ez baitago beragandik "hurbilago", eta aldi berean, ordinal limitea guztien Bestea da.

Ordinal limitea aldendu egiten da bestean dagoen –eta "oraindik" zeinuan agertzen den– berberaren parte horretatik. Bera da berbera ez den bakarra, aurretik datorkion segitzaileen sekuentzia osoan. Ez da oraindik-bat-gehiago, jarraipen--arauaren insistentzian existitzen den Bat-anitzak baizik. Honetan lotzen dira alteritatearen (bestetasunaren) *lekua* (sekuentziaren termino guztiak bere barnean daude) eta Bestearen puntua (bere izenak, α, sekuentzian agertzen diren guztiez harantzago dagoen ordinal *bat* izendatzen du).

Holako fusioak, mugan, Bestearen lekuaren eta bere bataren artean dagoen hasierako izaki-puntua (hemen, ø, hutsa) eta ibilbide-arau bati dagokiona da, propioki, infinituaren kontzeptu orokorra.

4. Bigarren existentzi marka

Nolanahi ere, heldu garen puntura iritsita ere, ezerk ez digu frogatzen oraindik ordinal limitearen existentzia. Egia esan, abiapuntutzat ø, eta ibilbide--arautzat jarraipena duen ordinalen sekuentzia amaigabearen existentzia ziurtatu ditugu, horiek bai. Baina zintzoak izanik, onartu behar dugu sekuentzia bera ere ez dela existitzen, bere termino (finitu) bakoitza baizik. Soilik erabaki axiomatiko[19] guztiz berri batek baimentzen digu sekuentzia bera bat egitea. Erabaki honek infinitua anitz edo multiple naturalen eskema ontologikoaren mailan ipintzearen alde ebazten du, eta hori eginez XVII. mendeko fisikarien keinua formalizatzen du.

18. Existentzia: izakia-hor delakoa baino haruntzago dagoen existentzia. «Ec-sistencia es –difiriendo fundamentalmente de toda *existentia* y '*existence*'– el ec-stático habitar en la cercanía del ser» (Heidegger, "Carta sobre el humanismo (a Jean Beaufret)" in Sartre-Heidegger 1981: 97).

19. Hemen, lehen bezala, Hilbert-en bideari jarraitu diogu, eta ez Russel edo Whitehead-ek proposatutakoari. Ezaguna denez, David Hilbert-ek matematikaren definizio genetikoen metodoa definizio axiomatikoen metodoarekin ordezkatu zuen. Matematikaren multzoa printzipio-apur batzutatik eta logikaren bitartez eraiki nahi ordez, logikatik aritmetikara eta aritmetikatik analisira iraganez, aldagai eta axioma berriak sortu zituen, pauso bakoitzean ondorioen eremua handitzen zihoala.

Honela esaten da: ordinal limiteak existitu egiten du. Baina “existitu” hori, hutsaren izenaren existentziaren ondoren, hartzen dugun bigarren erabakia da, eta bertan oinarritzen da, hain zuzen ere, izakiaren infinitutasuna.

Gauzak horrela, oraindik ez dugu “infinitua definitu”. Beraz, ezin ditugu infinitua eta ordinal limitea bat etorrarazi, ez eta ere finitua eta ordinal segitzailea, zeren eta, α ordinal limitea baldin bada, $S(\alpha)$ bere segitzailea, bera baino handiagoa baita, $\alpha \in S(\alpha)$ da-eta. Segitzaile finitu hori –segitzaile = finitu ekuazioa planteiatzen baldin bada–, bere aurrekari infinitua baino “handiagoa” litzateke; limite = infinitua ekuazioa planteiatzen baldin bada, berriz, hau pentsamenduarentzat arbuiagarria izateaz gain, horrek “infinitura pasatzea” keinu itzulezinezkoa izatea ezabatu egiten du.

Izaki naturalaren infinitutasunari buruzko erabakia ordinal limitearekin lotuta baldin badago ere, erabaki horri eusten dion definizioa desberdina da halabeharrez.

Badago ordinalen ezaugarri nagusi bat: minimotasuna. Ezaugarri bat duen ordinal bat existitzen baldin bada, orduan ezaugarri hori duen ordinal $\in$-minimo bakarra existitzen da. Izan ere, “ordinal limitea izatea” ezaugarri bat da, eta formula batez adierazten da: $\lambda(\alpha)$, honek aldagai libre bat duelarik. Beraz, ezaugarri horretarako ordinal $\in$-minimo bakarra dago. Hona hemen bada ordinal limiterik txikiena, eta hortik *honantzago* hutsa besterik ez dago. Eskema ontologiko hau funtsezkoa da, berak adierazten baitu infinituaren ataria. $\aleph_0$ deituko diogu. Izen propio honek, $\aleph_0$, anitz *bat*en itxuraren pean, erabakiaren bidez, izakiaren infinitutasunari dagokion lehen existentzia suposatua konbokatzen du. Homogeneotasun naturalean, segitzaileen ordena (hierarkizatua eta itxia) eta limiteena (irekia, eta ek-sistitzen den batek hautsia) aurrez-aurre jartzen dituen haustura estrukturalak $\aleph_0$-n aurkitzen du bere ertza.

Infinituaren definizioa ertz horretan ezartzen da. Beraz, honelaxe esango dugu: ordinal bat infinitua da $\aleph_0$ baldin bada, edo $\aleph_0$ bere barnean baldin badago. Eta berriz, ordinal bat finitua da $\aleph_0$-ren barnean baldin badago. Beraz, $\aleph_0$, multzo infinituen “tamaina” hautemateko neurri bihurtu da.

Horrela, beraz, Inf (infinitua) eta Fin (finitua):

$$\mathrm{Inf}\ (\alpha) \leftrightarrow [(\alpha = \aleph_0) \text{ edo } \aleph_0 \in \alpha]$$
$$\mathrm{Fin}\ (\alpha) \leftrightarrow (\alpha \in \aleph_0)$$

Azpimarratu egin behar dugu $\aleph_0$-ren estatutu apartekoa. Bera da, definitzen duen minimotasunagatik, bere barnean beste inolako ordinal limiterik ez duen ordinal infinitu bakarra. Beste guztien barnean $\aleph_0$ dago gutxienez, eta hau ez dago beraren barnean. Ordinal finituen eta $\aleph_0$-ren bitartean beraz, bitarterik gabeko amildegia zabaltzen da.

Hau da, anitzaren doktrinaren arazorik sakonenetako bat –kardinal handien teoria izenaz ezagutzen dena– amildegi hori infinituan bertan errepika daitekeenentz jakitea da. Cantor urte luzez saiatu zen **R**-ren (zenbaki errealen) kardinala (*jarraituaren potentzia*) zenbaki naturalen, **N**, kardinalen hurrengoa zela frogatzen, hots

$$\text{card } \mathbf{R} = \aleph_1$$

Ez zuen inolako frogarik lortu, ez positiboa, ez negatiboa. Hipotesi honi, card **R** = $\aleph_1$ delakoari, jarraituaren hipotesia[20] deitzen diogu. Eta sekulako garrantzia du, **N**-ren infinituaren ondoren **R**-rena datorrela frogatuko bailuke, eta bien artean beste multiple infiniturik, bere kardinala $\aleph_0$ eta $\aleph_1$ -ren bitartean legokeena, ez dagoela.

Jo eta ke aritu zen Cantor $\aleph_0$ eta $\aleph_1$-ren arteko bitartekoa aurkitzen. Badirudi ordea, anitz infinituen artean ere, aurretik datozen eta hurrengoen artean, ordinal finituen eta beren Bestearen artean bezala, ez dagoela inongo bitartekorik. Beraz, honek, *erabaki berri bat* eskatzen digu: infinituari buruzko axioma berri bat:

5. Infinituaren nagusitasun kontzeptuala

Existentziaren alorrean finitua lehena da, gure hasieran existitzen dena ø baita, eta guk{ø}, S{ø}... jokatu baitugu. Eta denak dira finituak. Baina kontzeptuaren alorrean, finitua bigarrena da[21]. Soilik $\aleph_0$-ren existentziatik atzera begiratuz kalifika ditzakegu ø, {ø}, eta abar lehenagotik existitzen ziren anitz-bat soil modura. Finituaren matematikak, ikusi dugun Fin $(\alpha) \leftrightarrow (\alpha \in \aleph_0)$, finitutasunaren irizpidea bera zintzilika uzten du, harik eta ordinal limiteen existentzia erabaki arte. Grekoek izakia finituarekin identifikatu bazuten, infinituari buruzko erabakiaren faltagatik izan zen, eta horregatik, ezinbestez gailendu zitzaien “dagoena finitua da” ondorioa. Eta orduan, finituaren esentzia izaki-anitza den modukoa da.

Baina anitz naturalak infinitu bihurtzeko erabaki historikoa hartu zenetik, finitua soilik izakiaren *erregio* bat da, haren presentziaren forma txikia. Infinituari buruzko erabakiak finitua erregionalizatu egin duela esan dezakegu. Cantorren intuizio handienetakoa horixe izan zen. Finituaren kontzeptua soilik argitu daiteke guztiz, infinituaren izaera funtsezkoa argitu ondoren. Hasierako itxura antagonikoa beraz, itxura besterik ez da. Ez dago finitu/infinituaren inongo dialektikarik. Ikusi dugun bezala, infinitutasunari buruzko erabakia hartu baino lehen, infinituaren interpretazio guztiak finitistak ziren. Hartu ondoren, finitua guztiz argituta eta erregionalizatuta gelditu da.

Ez da hau kasu bakarra matematikaren historian. Klein-ek geometria euklidearra sakondu eta garatu zuen; eta, itxuraz behintzat, Riemann-ek bere geometria aurkeztu zuenean, pare kontraesankor bezala ikusteko tentazioa egon zen. Geroago argi ikusi da geometria riemanndarrak bestea kasu partikular bihurtu due-

20. «On sait, depuis les travaux de P.J. Cohen, que l’hypothèse du continu est indécidable au regard des axiomes classiques de la théorie. On peut l’affirmer ou la nier sans introduire de contradiction» (Badiou 1990: 276).

21. «Les mathématiques se présentent ainsi comme des synthèses successives oú chaque étape est irréductible à l’étape antérieure» (Lautman 1977: 26).

la[22]. Fisikaren arlora pasatuz, gauza bera esan daiteke: erlatibitate orokortuaren eta erlatibitate murriztuaren arteko kontrakotasuna ez zen antzekoen edo berdinen arteko dema. Lehenak bestea suntsitu beharrean, erregionalizatu egin zuen.

6. Infinitutasunak kopuru infinituan daude

Ikusi berri dugunez, infinitua ez da bakarra; gutxienez, bi daude: **N**-ren infinitua, $\aleph_0$ delakoa, eta **R**-ren infinitua, $\aleph_1$. Baina ba al dago besterik? Beste asko gehiago?

Egin dezagun goranzko ibilbidea. Nola lortuko dugu A anitz batetik hasita beste A baino handiago bat? Har dezagun hasteko nahiko sinplea den A anitza. A = {a, b, c}. Har dezagun A-ren parteen anitza: {ø}, {a}, {b} eta {c} bakunak; {a, b}, {a, c}, {a, c} bikoteak eta {a, b, c} hirukotea. Orduan, Aren parteen multzoak zortzi elementu ditu; beraz, card P(A) = 8 (edo 2^3). Oro har, n elementu dituen anitzean, bere parteen anitza 2^n izango da. Cantorrek frogatuta utzi zuen A delako anitz infinituaren parteen anitzaren kardinala, Aren kardinalaren mailaz goragokoa dela. Bereziki, **N**ren parteen anitzak $2^{\aleph_0}$ du kardinaltzat. Eta kardinal hori eta **R**rena berdinak dira.

Hala ere, eman ditzagun argitasun batzuk. Zenbaki errealak zenbaki osoen serie gisa ere ikus daitezke (π = 3,141592..., *e* = 2,7182818284..., $\sqrt{2}$ = 1,414213562..., 1/3 = 0,33333... eta abar). Beraz, zenbaki erreal orori guk **N**ren parte bat egoki diezaiokegu, eta alderantziz ere bai, hots, **N**ren edozein parteri zenbaki erreala egoki diezaiokegu. Adibidez, **N**ren {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...} delakoari, 0,1234567... zenbaki erreala egoki diezaiokegu. Dena dela, argitu dezagun ezin dugula, oraindik, zirriborrotu dugun anitz bien arteko harremana "bijektiboa" dela esan[23]. Hain zuzen ere, Cantorren ekarpenetako batek zenbaki errealen anitzak eta **N**ren parteen anitzak dituzten kardinalak berbera direla dio.

Honetatik guztitik hauxe atera dezakegu: infinituen kopuru infinitua existitzen da. Beraz, kardinal desberdinen seriea egin dezakegu:

$$\aleph_1\ \aleph_2\ \aleph_3\ \aleph_4\ \aleph_5 \ldots\ \aleph_n$$

Hona hemen mailaka antolaturiko infinituen kopuru infinitua. Lehen mailan $\aleph_0$ infinitu zenbakarriaren maila[24], "infiniturik txikiena", nolabait esateko "finitutik hurbilen dagoen infinitua"; bigarren maila $\aleph_1$, $\aleph_0$-tik hurbilen dagoen infinituari dagokio... Horrela bada, anitz baten kardinala aztertzea, nolabait, anitz horri bere mailako kardinala egokitzea da, maila bereko anitzekin bijekzioan ipiniz.

---

22. «Partis de l'antagonisme entre les géométries de Klein et la géometrie de Riemann, nous arrivons après un long détour à cette constatation que c'est sous la forme riemannienne que les géométries de Klein montrent de mieux leurs propietés fondamentales» (Cartan, *La théorie des groupes et la géometrie, Eus.Math*, 1927, in Lautman 1977: 44).

23. Bijektiboa: A eta B multzoen arteko aplikazioa. Ako bi elementu desberdinek Bn irudi desberdina izanik eta Bko elementu guztiei An elementu bakar bana dagokielarik.

24. «Zenbakarria: Zenbaki arrunten anitzarekin bijekzioa egitea onartzen duen anitza. Zenbaki arruntak eta razionalak zenbakarriak dira; irrazionalak, berriz, ez.»

Itzul gaitezen orain **R**ra. Ikusi dugunez, bere kardinala (edo potentzia) **N**rena baino handiagoa da. Baina zer gertatzen da soilik **R**ren zati bat aztertzen badugu? Adibidez, [0, 1]-ren kardinala > $\aleph_0$. Galde dezakegu orduan [0, 1]-ren kardinala **R**rena baino txikiagoa denentz, honek zenbaki erreal guztiak hartzen baititu. Egia esan, nahiko sinplea da [0, 1]-ren kardinala eta **R**rena berbera direla frogatzea: **R**n ez dago [0, 1] delakoan baino zenbaki gehiago, zeren anitz bietako zenbakiak banan-banan elkar egokitu (bijekzioan ipini) baitaitezke.

7. Politikaren anitz infinituak

Filosofia existitzen denetik, kolektiboa –bere egintzaren bidez– den egia izateari, justizia deitzen zaio. Horregatik Platonek *Errepublika*-ren IV. liburuan argi uzten du justizia ez dela kanpoko arau bat, ez eta gauzei buruzko kalifikazioa ere. Justizia, dio berak, barnekotasuna ukitzen duen egintzari esaten zaio, eta hortik bakarrik etor daiteke. Komunitatearen irudian, beraz, justizia ez da kolektiboari buruz esan daitekeen zerbait, kolektiboa bera egia bihurtuta baizik.

Honek argi uzten du justiziak beharrizanetik banatuta egon behar duela. Platonek berak *Errepublika*-ren VI. Liburuan sofistaren definizio funtsezko hau ematen du: sofista “ongia eta beharrizana zein puntutaraino diren diferenteak” ikusteko gauza ez dena da. Borondate politikoa komunitatearen beharrizanaren menpe –ongiaren irudia bailitzan– ipintzea borondate hori sofistikaren menpe ipintzea da[25]. Era honetara, politika beharrizanaren gestioa izatera murrizten da eta, ondorioz, emantzipazio-politika oro ezinezkoa dela esaten zaigu. Guk, ordea, beste honi eutsiko diogu: politika “ezinezkoa” baldin bada ere, horrek ez dio oztoporik egiten emantzipazio-politikaren preskripzioari, honek komunismoa, askapen nazional edo beste edozein izen duelarik ere.

Politikaren alorrean ere anitz infinitu desberdinak axiomatikoki defini ditzakegu: kardinaltasun desberdineko infinituak, eta horien artean, potentziakideak direnak. Esaterako, ENAMa anitz infinitua dela esan dezakegu, bere hedatzeko ahalmena infinitua baita. Kanpotik jar dakiokeen edozein murrizketa, legal edo moral sobera gainditzen duenez, bere hedaketa ez du kanpoko inongo mugak murriztuko. Soilik barne-lege bati obeditzen dio, eta hau axiomatikoa da. Kanpotik etor daitekeen edozein legetatik aldenduta dago, eta bere burua aldentzen segitzen du. ENAMa multiple infinitua izanik, bere parteak ere infinituak dira eta haren potentzia berekoak: harekin bijekzioan daude. Ez dira osoaren parte txikiagoak, greziarren eskema ontologiko finitistaren arabera, potentziakideak baizik.

Herri-mugimenduak berriz askapen nazionalaren egiaren anitzaren potentzia osoa adierazten du puntu batean. Ez da haren frakzio bat. Leninek zioenaren ara-

25. Jarrera hau oso nabarmen agertzen da, esaterako, *Deia* egunkariaren editorial batean. Hain zuzen ere, Autonomi Estatutuaren erreferenduma egin ondorengo iruzkinean: «Ha pasado la hora de la política pura (sic) y de los planteamientos generales. El hombre de la calle está preocupado por la calidad de vida, no sólo en un sentido ecológico, sino en un ámbito más amplio: Puntos vitales para él son la seguridad en el trabajo, la defensa de la vida, la existencia de puestos escolares para sus hijos, el funcionamiento de unos buenos transportes públicos, la calidad de una red asistencial y hospitalaria» *Deia* 1979-XI-11.

bera, borrokak puntu batean erdiratu behar dira, ez zatikatu.[26] Puntu hori metatze-puntu[27] bihurtzen da, eta bere gain anitz osoaren potentzia biltzen du. Euskal Herrian badaude hainbat unetan ENAMen potentzia osoa bildu duten anitzak edo multipleak: Lemoiz, ikastolen mugimendua, Lurraldea, euskararen aldeko mugimenduak... eta anitz hauek ere infinituak dira. Ezin da esan, zinez, hura baino handiagoak edo txikiagoak direnik, kardinaltasun berekoak baitira. Bestalde, potentzia goragokoak soilik adieraz dezake bere potentzia beste anitz hauen bitartez.

Ikusi dugunez, matematika transfinituan hainbat kardinal daude. **R**ren kardinala, $\aleph_1$, **N**rena baino mailaz goragokoa izanik ere, ez dakigu "zein neurritan" den goragokoa. Askapen nazionalaren borrokan ere, kardinaltasun desberdineko infinituak daude. Maila bereko kardinaltasunean elkar litezkeen multiple infinituak subiranotasuna eta independentzia dira. Mailaz goragoko kardinala duen anitz infinitua, askapen nazionalaren egiarena litzateke. Aurreko biak, axiomatikoki fundatu diren arren, egoeratik zenbatu daitezkeen elementuak dituzte (zenbakarriak dira); egoeratik hartutako elementuez eta beren baliabideez imajinatu egin daitezke. Pentsatuz eraiki daitezke. Egiaren anitzak, berriz, egoerakoak ez diren elementuen kopuru infinitua du, egoeratik asmatu, ez eta pentsatu, ezin daitezkeenak; labur esanda, ezin da aurreko anitzekin agortu. Bere kardinaltasuna besteena baino maila goragokoa da. Beste bien bilduratik ere pentsaezinak diren infinitu elementu ditu. Potentzia maximoa duten anitz hauek anitz generikoak, ezjakingarriak, bereiztezinak deituko ditugu.

Bestalde, euskararen inguruan antolatzen diren mugimenduak, euskal prentsa, irakasleria propioa, abokatu euskaldunak, udal elebakarrak, intsumisioa..., egiaren multiplearen potentziakideak dira. Herri-mugimenduak, oro har, askapen nazionalaren egia aldarrikatzen duen anitzaren kardinalkideak dira. Beraz, autodeterminazioa edo independentziaren formulazio juridikoak osatzen dituzten anitzak baino maila goragokoak dira.

Nola jokatzen du infinitu aktualak politikan? Gertakizun batetik ateratako axioma fundatzaile batetik (egiatik sorturiko axioma batetik) sortzen da. Hortik, anitz generiko baten existentzia aldarrikatzen da: klase-borrokaren kasuan komunismoa zeritzon; nazio-borrokaren kasuan, anitz generikoari askapen nazionalerako prozesua deritzo. Axioma eratuta dagoenean, beste infinitu multiple batzuk sortzen dira, egoeratik eta axioma generikoari begira. (Komunismoaren kasuan, helburu taktikoa botereaz jabetzea zenez gero, epealdietan antolatu ziren, hala nola: gerra zibila, klase-partidua, matxinada, proletalgoaren diktadura eta sozialismoa. Bitartean, komunismoak –klaserik gabeko gizartea–, egia generiko agortezina izaten segitu behar zuen). Sozialismo errealek ordea, anitz generiko infinitua bere aurkezpen historikoarekin nahastu zuten, eraiki eta aurkeztutako imajinarioa,

26. «Toda la vida política es una cadena infinita compuesta de un sinfín de eslabones. Todo el arte de un político estriba justamente en encontrar y aferrarse con nervio al preciso eslaboncito que menos pueda ser arrancado de las manos, que sea el más importante en un momento determinado y mejor garantice a quien lo sujeta la posesión de toda la cadena» (Lenin 1981: 180).

27. Cantorrek 1872an idatzitako artikuluan puntu berezien multzoak definitzeko puntu-limiteak edo metatze-puntuak erabili zituen. $\sqrt{2}$ delako zenbaki irrazionala, adibidez, 1; 1,4; 1,41, 1,414,... zerrendaren metatze-puntua da. Oro har, puntu bat anitz baten metatze-puntua dela esan daiteke, multzo horrek, beti, puntu-kopuru infinitua metatze-puntutik arbitrarioki hurbil daukanean.

egia generikoarekin. Borroka nazionalean, subiranotasuna eta independentzia faseak lirateke, eta nazio-askapena, multiple generiko agortezina.

Nolanahi ere, ontologiak ezin dio egiaren kontzeptuari eutsi (gertakizunarena falta zaiolako), eta ezin du subjektuarena taxutu ere. Subjektuaren oinarrizko legeari dagokion izaera-mota –*bortxaketa*[28] alegia– pentsa dezake, ordea. Denbora ororen faltan, Cohenek bereiztezina eta erabakiezinaren arteko eskema ontologikoa ezarri zuen. Eta modu horretara ontologia eta subjektuaren existentzia bateragarriak direla erakutsi zigun. Gauzak horrela, izakiaren esanetik (matematikatik) aldenduta egon arren, subjektuak izateko ahalbidea dauka.

Anitz imajinarioak hesitu ondoren, *subjektu* batek lan egiten du (*bortxatu*) kardinal beheragoko anitz horiek egoeran aurkezteko, errealitatearen parte bihurtzeko, ezagugarriak izan daitezen. Bortxaketa horrek ibilbidean utzitako markek ("lorpenak", nahi bada) osatzen dute egiaren prozesu errealaren ibilbide amaigabea. Eta erreala beti iheska dabilkigun hori da (Lacan). Ezin da inoiz generikoa, erreala den hori, zuzenean *bortxatu*; beharrezkoa da kardinal txikiagoko anitzen bitartez egitea. Ibilbide hau ilustratzeko, Leninek, tesi "materialistak" defenditzen zituen Martinov burkidearekin izandako elkarrizketa "sokratiko" paregabea ikustea besterik ez dago[29]. Aldez aurretik adierazitako axioma baten ondoren (klaserik gabeko gizartea), Leninek amets egin behar dela diosku, eta anitz imajinario baina eraiki daitezkeenak pentsatzeari ekiten dio (egunkari batetik hasi eta matxinadaraino). Halaber, ongi bereizten ditu aurreikus daitezkeenak eta aurreikus ezin daitezkeenak (infinitu nagusiago batekoak baitira). Horrela ez bada egiten, ezinezkoa da inongo egoerarik *bortxatzea*. (Einsteinek ere, zientziaren alorrean, "esperimentu imajinarioak" kuraiaz defenditu zituen bere arerioen kontra).

Subjektuak, egia gauzatu dadin, tortsioak egiten ditu. Multiple infinitu "mugatu" horiek *bortxatzen* ez baditu, anitz imajinario soil, gauzaezinak, infinitu potentzial (egoeran dagoenaren negazio huts) bihurtzen dira. Orduan, *forcing* egiten ez duen subjektua desiatzaile huts bihurtzen da, eta anitz mugatu eta eskuragarriak kardinal handiagoko infinituarekin nahasten ditu; *utopia*[30] agertzen da. Bi desbideratze klasiko datoz pentsamendu transfinituaren arauak enoratzetik: lehenak, egiaren multiple infinitu generikoa potentzia handiagoko infinituarekin nahastu eta

28. "Forcing" delakoa Paul Cohen-ek sortutako iraultza intelektualaren bigarren aldea da ("bereiztezina"ren ondoren). Cohen-ek puntu honetaz egindako ekarpenik garrantzitsuena honela laburbil dezakegu: funtsezko egoera ia oso batean, posiblea da erabakitzea zein baldintzatan enuntziatu bat ala beste den egiantzekoa, egoeraren parte bereiztezin bat erantsiz lortutako hedapen generikoan.

29. "Hay que soñar. Mis sueños pueden adelantarse al curso natural de los acontecimientos o bien desviarse hacia donde el curso natural de los acontecimientos no puede llegar jamás. En el primer caso los sueños no pueden producir ningún daño, incluso pueden sostener y reforzar las energías del trabajador (...) en sueños de esta índole no hay nada que deforme o penalice la fuerza de trabajo. Todo lo contrario. Si el hombre estuviese privado por completo de la capacidadad de soñar así, si no pudiese adelantarse alguna que otra vez y contemplar con su imaginación *el cuadro enteramente acabado* [etzana gurea da] de la obra que empieza a perfilarse por su mano [*forcing* delakoa] no podría figurarse de ningún modo qué móviles lo obligarían a emprender y llevar a cabo vastas y penosas empresas en el terreno de las artes, de las ciencias y de la vida práctica" (Lenin 1981: 188).

30. Idealtzat baina ezin gauzatuzkotzat jotzen den ideia edo proiektua. T. Moro-ren *Utopia* klasikoa eta sozialista utopikoak alde batera utzita, ikus berriagoak diren Francfurteko eskolakoen lanak (Adorno-ren *Dialéctica negativa*-tik hasita eta Habermas-en azken lanetaraino) eta, bereziki, Ernst Bloch-en (1885-1977) *El espíritu de la utopía* (1918-1923) eta *El principio esperanza* (1954-59).

guztiz finkatu nahi du. Bide honek *hondamendi*-ra garamatza, eta historikoki izen bat du: Stalin; komunismoa dagoenekoz gauzatuta zegoela adierazi zuenean. Besteak, egoera *bortxatu* nahi ez duelako, ez ditu anitz mugagarriak bortxatzen eta ondorioz, kardinal goragokoa duen infinituarekin nahasten ditu, eta horrela, desio iraunkor eta gauzaezinean mantenduz, utopian geratzen da.

Hondamendia eta utopia, horra hor politika emantzipatzailea ezinezkoa egiten duten bi desbideraketak. Batak, egintza gehiegiagatik, egia gauza arrunt bilakatzen du; bigarrenak, egintza gutxiegiagatik, egia utopia bihurtzen du.

Bibliografia

Badiou, A. (1990): *Le Nombre et les nombres*, Seuil, Paris.
Bergson, H. (1985): *La evolución creadora*, Austral, Madril.
Cantor, (1980): *Gesammeltte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Springer-Verlag.
Delahaye, J.-P. (1997): *Le fascinant nombre* π, Pour la Science, Paris.
Gómez de Liaño, I. (1997): *Giordano Bruno. Mundo. Magia. Memoria*, Biblioteca Nueva, Madril.
Kant, E. (1912 itz.): *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir,* Daniel Jorro ed., Madril [Julián Besteiroren itzulpena].
Koyré, A. (1971): “Remarques sur les paradoxes de Zenon” in *Études d’histoire de la pensée philosophique*, Gallimard, Paris.
Lautman, A. (1977): *Essai sur l’unité des mathématiques*, Union Générale d’Éditions, Paris.
Lenin (1981 itz.): *¿Qué hacer?*, Progreso, Mosku.
Noël, G. (1893): “Le mouvement et les arguments de Zenon d’Élée”, *Revue de Métaphysique et de Morale,* Paris.
Peano, (1979 itz.): *Los principios de la aritmética*, Pentalfa, Oviedo [Julián Velarderen itzulpena].
Russel, B. (1903): *Principles of mathematics*, Cambridge.
Sartre, J.-P. eta Heidegger, M. (1981 itz.): *El existencialismo es un humanismo*, Ediciones del 80, Buenos Aires.
Verdier, N. (1997): *L’infini en mathématiques*, Flammarion, Paris.