



IKER
GAZTE
NAZIOARTEKO
IKERKETA EUSKARAZ

VI. IKERGAZTE

NAZIOARTEKO IKERKETA EUSKARAZ

2025eko maiatzaren 28, 29 eta 30a
Bilbo, Euskal Herria

ANTOLATZAILEA:
Udako Euskal Unibertsitatea (UEU)



Aitortu-PartekatuBerdin 4.0

GIZARTE ZIENTZIAK ETA ZUZENBIDEA

**Derrigorrezko Bigarren
Hezkuntzako ikasleek GeoGebran
egindako esplorazioaren bidez
ebatzi dituzten jardueren analisisa**

Jaione Abaurrea Larrayoz

67-74 or.

<https://dx.doi.org/10.26876/ikergazte.vi.02.08>

ANTOLATZAILEA



BABESLEAK



LAGUNTZAILEAK



BERGARA

Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako ikasleek GeoGebra egindako esplorazioaren bidez ebatzi dituzten jardueren analisia

Jaione Abaurrea Larrayoz
Nafarroako Unibertsitate Publikoa
jaione.abaurrea@unavarra.es

Laburpena

Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako 108 ikasleri zirkunferentzien luzera eta zirkuluen azalera lortzeko poligono erregularren hurbilpenen oinarritutako metodo bat aurkeztu zaie. GeoGebra egindako esploraziotik jasotako datuekin, ikasleek neurri horiek identifikatu behar izan dituzte eta, ondoren, metodo honen eta metodo aljebraikoaren ($2\pi r$ edo πr^2) arteko erlazioa identifikatu behar izan dute. Esperimentazioaren emaitzek argiztatu dute ikaslegoaren erdiak baino gehiagok luzera eta azalera identifikatzea lortu duen arren, ikasle asko ez direla gai izan esploraziotik jasotako informazioa ongi erabiltzeko. Gainera, oso ikasle gutxi identifikatu dute bi metodoen arteko erlazioa eta erlazio horren zergatia. Guzti honek ulermen erlazionalaren garapenaren beharra agerian uzten du.

Hitz gakoak: GeoGebra, esplorazioa, arrazoiketa, ulermen erlazionala

Abstract

108 students of Compulsory Secondary Education were introduced to a method based on the approximation of regular polygons to obtain the length of circumferences and the area of circles. With the data obtained from the exploration carried out in GeoGebra, the students were tasked to identify said measures and, subsequently, identify the relation between this method and the algebraic one ($2\pi r$ or πr^2). The results showed that, although more than half of the students were able to identify the length and the area, several students did not correctly use the information obtained from the exploration. In addition, very few students were able to correctly determine the relationship between the two methods and the rationale behind this relation. This exposes the need to develop relational understanding.

Keywords: GeoGebra, exploration, reasoning, relational understanding

1. Sarrera eta motibazioa

Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzako (DBH) curriculumak matematikaren ezaugarri bezala identifikatzen ditu, besteak beste, arrazoitzea, argudiatzea, modelizazioa, espazioa ezagutzea, erabakiak hartzea eta teknologia digitala modu egokian erabiltzea; ondorioz, ezinbestekotzat hartzen du ikasleek oinarritzko gaitasun horiek garatzea (Nafarroako Gobernua, 2022b, 184 or.). Hala ere, ikastetxe askotan, oraindik, prozedura mekaniko eta algoritmikoen bidez ebatzen diren jarduerak gailentzen dira.

Konikien lanketari dagokionez, ikasmaila batetik bestera, elkarren antzekoak diren eta arrazoiketaren beharra ez duten jarduerak proposatzen dira. Ondorioz, ikasleek “jarduera-eredu” horiek modu mekanikoan ebatzen ikasten dute, memoriaz ikasitako teknikak behin eta berriz aplikatuta (Abaurrea, 2023). Era berean, forma lauen perimetroa eta azalera lortzeko, ikasleei neurri horiek kalkulatzeko adierazpen aljebraikoak buruz ikastea eskatzen zaie eta, zenbait datu ezagututa, ikasleek formula horiek zuzenean aplikatzen dituzte inolako arrazoiketarik egin gabe. Adibidez, zirkunferentzien luzeraren eta zirkuluen azaleraren neurketa honela landu ohi da: erradio edo diagonalaren neurria datu bezala emanda, ikasleek datu hori luzera zein azalera lortzeko adierazpenean ($2\pi r$ edo πr^2) txertatzen dute eta, azken balioa kalkulatu, zeregina amaitutzat ematen da.

Matematika lantzeko modu algoritmiko eta mekaniko hori alde batera utziz, ikerkuntza honetan aurkeztu den proposamen didaktikoan esplorazioa, arrazoiketa eta ezagutzen artean loturak ezartzea sustatu nahi dira. Horretarako, zirkunferentzia eta zirkuluaren neurriak lortzeko modu ezberdin bat proposatzen da, Arquimedes matematikariaren ekarpenetan oinarrituta dagoena (Boyer, 1986). Bide berean, baliabide ezberdinen erabilera bultzatzeko helburuz, papera-arkatza eta baliabide digitala integratzen dira.

2. Arloko egoera eta ikerketaren helburuak

Lehen Hezkuntzan (LH) eta DBHn gaur egun indarrean dauden curriculumek izaera konpetentziala daukate (Nafarroako Gobernua, 2022a, 2022b). Konpetentzia matematikoa garatzeari esker, ikasleek haien bizitzako beharrak asetzeko matematika erabiltzea lortu nahi da, baita ikasleak herritar eraikitzaile eta gogoetatsuak bihurtzea ere. Beste hitzetan esanda, bizitzak planteatzen dituen arazoei aurre egiteko eraginkortasuna duten eta arrazoiketa zentzudunak egiten dituzten pertsonak prestatu nahi dira (Beltrán-Pellicer eta Alsina, 2022).

Arrazoitzeak bere barne hartzen du fenomenoak aztertzea, aitorpenak egiaztatzea eta, datuak zein argudioak erabiliz, emaitzak justifikatu edo faltsutzea (Smit et al., 2023). Beraz, arrazoiketak herritarren gaitasun praktiko eta intelektuala garatzeko potentziala du, hala nola pentsamendu kritikoa, arazoak konpontzea edo alfabetatzea (Foley et al., 2023). Honela, jada 2000. urtean Matematikako Irakasleen Kontseilu Nazionalak (NCTM, “National Council of Teachers of Mathematics” ingeleraz) babesten zuen bezala, irakasleek ikasgelan problemen ebazpena, arrazoiketa eta frogak, komunikazioa, erlazioak ezartzea eta adierazpena sustatu behar dituzte, hauek baitira kalitatezko ikaskuntza matematikoa bermatzeko bost prozesu-estandarrek (NCTM, 2003). Honen ondorioz, Beltrán-Pellicer eta Alsina (2022) adierazten duten moduan, herrialde askok beraien curriculumetan prozesu matematiko hauek integratu dituzte, eduki matematikoekin batera, konpetentzia matematikoari mesede egiten dioten ezagutza multzo gisa.

Skempek (1976) ikas-edukia ulertzeko bi modu bereizten ditu: *ulermen instrumentala* eta *ulermen erlazionala*. Ulermen instrumentala eduki, metodo eta algoritmoen memorizaziotik eratorria da eta ezagutzak beti modu berdinean aplikatzea ahalbidetzen du (ebazteko metodo bera aplikatuta, beti abiapuntu beretik hasita eta urrats berberak sistematikoki jarraituz). Aitzitik, ulermen erlazionala arrazoiketari esker lortzen da eta ezagutzak erlazionatzeko gaitasuna dakar, hau da, zeregin berean ebazpen-teknika desberdinak aplikatzea ahalbidetzen du (abiapuntu desberdinetatik eta beti urrats berberak aplikatu gabe), bai eta ataza desberdinen arteko erlazioak ezartzea ere. Beraz, ulermen instrumentalari esker jarduerak ebatzi daitezkeen arren, “jarduerareduak” dira ebatzi daitezkeen horiek eta, ondorioz, ulermen hau ez da aski izango zeregin mekanikoetatik aldentzen diren jarduerak ebazteko. Horrela, konpetentzia matematikoak eta prozesu matematikoek azpimarratzen dutena bete dadin, hain zuzen ere, matematika testuinguru eta egoera askotan modu ulerkor eta eraginkorrean erabiltzeko gaitasuna lor dadin (Beltrán-Pellicer eta Alsina, 2022), ulermen erlazionala beharrezkoa da.

LH eta DBHko curriculumek (Nafarroako Gobernua, 2022a, 2022b) konpetentzia digitala garatzearen garrantzia ere nabarmentzen dute. Baliabide digitalen aukeraketa egoki bati esker, ikasleek ezagutza matematikoa ikasi eta sakondu dezakete (Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas, 2021). Are gehiago, laguntza teknologikoak matematikaren zentzua ulertzera eraman ditzake ikasleak (Baccaglini-Frank, 2021). Puntu honetan, eta bereziki eduki geometrikoa landu nahi bada, GeoGebra (GGB) software dinamikoa tresna aproposa da bere izaera dinamikoa objektu matematikoak modu azkarrean irudikatzea eta eraldatzea ahalbidetzen duelako (Freyre eta Mántica, 2017). Honek, gainera, generalizazio prozesuan laguntzen du; ezaugarri konkretu batzuk betetzen dituen objektu familia bat denbora gutxian aurkeztu daiteke familia horretako objektu partikular bakarra erakutsi beharrean (Abaurrea, Lasa eta Wilhelmi, 2019). Era berean, izaera dinamikoa honek ikasleek esplorazioa ahalbidetzen du (Baccaglini-Frank, 2021; Bray eta Tangney, 2017; Lasa eta Wilhelmi, 2013) softwarearekin diseinatutako aplikazioak manipulatu, objektuen eta hauen propietateen inguruko informazioa jaso eta azter daitekeelako. Esplorazioak fenomenoak aztertzea, horien inguruan arrazoitzea eta fenomenoak

arteko erlazioak identifikatzea bere barne hartzen duenez, ulermen erlazionalaren garapenerako lagungarria da. Azkenik, GGB software librea izanik, ikasle guztiek ikastetxetik kanpo erabili dezakete, eta hau onuragarria da beraien ikaskuntza autonomorako.

Jarraian, DBHko bigarren mailako ikasleekin zirkunferentzia eta zirkuluaren neurriak lortzeko GGB erabiliz aurrera eraman den ikaskuntza-egoera bat deskribatzen da. Jardueren diseinua aurkezteaz gain, ikasleen erantzunak bistartzen eta aztertzen dira. Ikerkuntza honek bi helburu ditu: 1) ikasleek koniken neurriak GGBn egindako esplorazioaren bidez bakarrik identifika ditzaketen zehaztea, adierazpen aljebraikorik erabili gabe; 2) ikasleek neurriak lortzeko metodo berri honen eta metodo aljebraikoaren arteko erlazioa identifikatzea lortzen duten aztertzea.

3. Ikerketaren muina

Atal honetan populazioa, ikerketa metodoa, ikaskuntza-egoeran aurrera eraman diren jarduerak, emaitzak eta hauen analisia aurkeztuko dira.

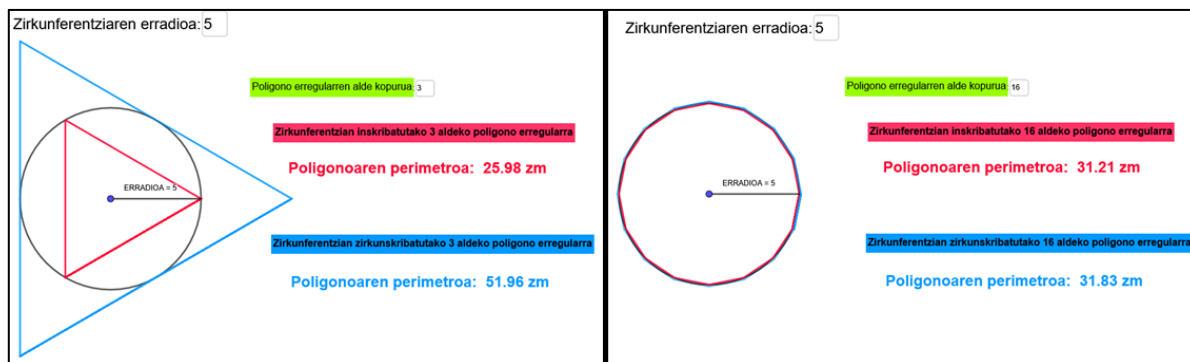
3.1 Populazioa eta ikerketa metodoa

Hiru ikastetxe ezberdinetako 108 ikasleren jarduna aztertu da, guztiak DBH 2. mailakoak izanik. Datuak modu kualitatibo zein kuantitatiboan aztertu dira. Alde batetik, ikasleen kasu azterketa egin da ikasle bakoitzaren erantzun eta arrazoiketak aztertuz (analisi kualitatiboa). Bestetik, datuak antolatuz, ikerketa estatistiko deskriptibo bat egin da (analisi kuantitatiboa).

3.2 Ikaskuntza-egoeran aurrera eraman diren jarduerak

Arquimedesen metodoaren bidez zirkunferentzia eta zirkuluaren neurriak lortzeko bi jardura proposatu dira. Metodo honek zirkunferentzian (eta, ondorioz, bere barneko zirkuluan) zirkunskribatutako eta inskribatutako poligono erregularrak erabiltzen ditu. 1. irudian ikus daitekeen bezala, poligono erregularren alde kopurua handitu ahala, poligono hauek elkarren geroz eta antzekoagoak dira eta, era berean, geroz eta gehiago hurbiltzen dira zirkunferentziak (eta, ondorioz, zirkuluak) daukan formara.

1. irudia. GGBn egindako esplorazioa



Lehenengo jardura zirkunferentziaren luzeran eta bigarren jardura zirkuluaren azaleran oinarritzen diren arren, biek egitura berdina daukate. Lehenik, dagokion laukitxoan, erradioarentzat luzera ezberdinak idatzi behar dira GGBk zirkunferentzia eta zirkulu ezberdinak irudikatu ditzan (zirkunferentziaren jardueran baliabide bat¹ erabili behar da, eta zirkuluaren jardueran beste bat²). Konika hauetako bakoitzerako, poligono erregularren alde kopuruari dagokion laukitxoan balio ezberdinak idatziz gero, poligono ezberdinak irudikatu eta horien inguruko informazioa ematen du GGBk (poligonoen perimetro edo azaleren neurriak, jardueraren arabera). Esplorazioa baliabide digitalak ematen duen informazioaren gainean egiten da; zehazki, poligonoen adierazpenak eta beraien perimetro edo azaleren balioak nola aldatzen diren aztertzean eta aldaketa horren inguruan hausnartzean.

¹ Zirkunferentziaren luzera lantzeko baliabidea: <https://www.geogebra.org/m/qp9hb4yt#material/xpfvgnnb>

² Zirkuluaren azalera lantzeko baliabidea: <https://www.geogebra.org/m/qp9hb4yt#material/uh2mdt9r>

Ondoren, zirkunferentziaren luzeraren jardueran, GGBn egindako esploraziotik lortutako datuekin 1. taula bete eta 2. irudian zehazten diren galderak erantzun behar dira paperean. Honek guztiak zirkunferentziaren luzera poligono erregularren hurbilpenaren bidez lor daitekeela ondorioztatzera eramán ditzake ikasleak. Zirkuluaren azaleraren inguruko jardueran, egitura berdina duten taula eta galderak proposatzen dira, nahiz eta hauek azaleraren inguruko informazioan oinarritzen diren.

1. taula. GGBn egindako esploraziotik jasotzen diren datuak biltzeko taula

Poligono erre- gularren alde kopurua	Poligono zirkunskribatuaren pe- rimetroa (P_{zirkun})	Poligono inskribatuaren perimetroa (P_{ins})	$P_{\text{zirkun}} - P_{\text{ins}}$	$P_{\text{zirkun}} / 2r$	$P_{\text{ins}} / 2r$
3					
4					
6					
16					
32					
64					

2. irudia. GGBn egindako esploraziotik jasotzen diren datuekin erantzuteko galderak

1. Noiz dira poligono zirkunskribatua eta inskribatua desberdinagoak beraien artean, poligonoek alde asko edo alde gutxi dituztenean?
2. Poligono zirkunskribatuaren perimetroaren eta poligono inskribatuaren perimetroaren arteko aldea noiz da handiagoa, poligonoek alde asko edo alde gutxi dituztenean?
3. Poligonoen alde kopurua handitzean, poligono hauek zirkunferentziaren antz handiagoa daukate?
4. Esan zein den zirkunferentziaren luzera (gutxi-gorabehera).
5. 32 eta 64 alde dituzten poligonoetan, zein zenbaki lortzen da azkeneko bi zutabeetan? Zergatik?
6. Orduan, zein teknika erabili daiteke zirkunferentzia baten luzera (edo behintzat, horren hurbilpen bat) lortzeko?

3.3 Emaitzak eta hauen analisisa

Lehenengo jarduera ikasle guztiek egin dute. 2. taulan ikus daitekeen bezala, 65 ikaslek (populazioaren %60 inguru) zirkunferentziaren luzera edo hurbilpena identifikatzea lortu dute eta, hauetatik gehiengoak, GGBn egindako esploraziotik lortutako datuak erabiliz egin du. Zehazki, 56 ikasle izan dira 64 aldeko poligono erregularren perimetroen informazioa erabili dutenak eta, ondorioz, edukien inguruko ulermen erlazonala aurkeztu dutenak; nahiz eta guztiek ez duten modu berdinean egin. 37 ikaslek ez dute kontutan hartu zirkunferentzia bi poligonoen erdian gelditzen dela eta, ondorioz, ez dute erdiko balio hori kalkulatu; horren ordez, zirkunferentziaren luzera gisa poligono erregularren perimetroen balioen hurbileko balio bat aukeratu dute. 19 ikaslek, aldiz, zirkunferentziaren kokapena kontutan hartu eta bi poligono erregularren perimetroen erdiko balioa kalkulatu dute (3. irudia ikusi). Azkenik, zirkunferentziaren luzera egokia lortu duten ikasleekin bukatzeko, GGBn esplorazioa egin arren, informazio hori erabili ez duten 9 ikasle daude. Ikasle hauek zirkunferentziaren luzera adierazpen aljebraikoa erabiliz kalkulatu dute, prozedura mekaniko eta algoritmikoen bidez lan egiteko eta aljebra erabiltzeko joera dutela erakutsiz.

Aljebrearekiko prebalentzia erakutsi duten beste 14 ikasle daude, nahiz eta hauek ez duten adierazpen aljebraiko egokia erabili eta, ondorioz, ez duten zirkunferentziaren luzera ongi kalkulatu. Egoera honen aurrean, pentsa daiteke ikasle hauek adierazpen aljebraiko hori ikasi zutenean honen jatorria ulertu gabe egin zutela (ulermen instrumentala) eta, ondorioz, adierazpenaren zentzua ez ulertzeagatik, beraien akatsaz jabetu ez direla.

2. irudian aurkezten den bosgarren galderak Arquimedesen metodoaren eta adierazpen aljebraikoen metodoaren arteko erlazioaren inguruan arrazoitzea du helburu. 1. taulako azken bi zutabeek π

zenbakira jotzen dutela identifikatu duten 40 ikasleetatik 21ek joera hori zirkunferentziaren luzera lortzeko erabiltzen den adierazpen aljebraikoa erabilia arrazoitu dute. 4. irudian arrazoiketa hau egin duen ikasle baten erantzuna ikus daiteke eta, egin dituen eraldaketak eta aipamenak aintzat hartuz, ikasle honek adierazpen aljebraikoa modu erlazionalean ulertzen duela ondoriozta daiteke.

2. taula. Zirkunferentziaren luzeraren emaitzak

108 ikasle	65 ikasle Zirkunferentziaren luzera (edo hurbilekoa) lortu dute	56 ikasle GGBn egindako esploraziotik lortutako informazioa erabili dute	37 ikasle 64 alde dituzten poligono erregularren perimetroak erabili dituzte, baina erdiko balioa kalkulatu gabe
		9 ikasle Ez dute GGBn egindako esplorazioa erabili	19 ikasle 64 alde dituzten poligono erregularren perimetroen erdiko balioa kalkulatu dute
			9 ikasle Eskatzen ez zen arren, $2\pi r$ adierazpena erabiliz lortu dute zirkunferentziaren luzera
	43 ikasle Ez dute zirkunferentziaren luzera (edo hurbilekoa) lortu	14 ikasle Adierazpen aljebraikoa erabiltzen saiatu dira	12 ikasle $2r$ adierazpena erabili dute eta, ondorioz, luzera okerra lortu dute
			Ikasle 1 2π adierazpena erabili du eta, ondorioz, luzera okerra lortu du
			Ikasle 1 r^2 adierazpena erabili du eta, ondorioz, luzera okerra lortu du
		29 ikasle Ez dira adierazpen aljebraikoa erabiltzen saiatu	29 ikasle Ez dute zenbakizko baliorik eman, ez dute erantzun edo jatorri ezezagunekoa den zenbakizko balio okerra eman dute

3. irudia. Zirkunferentziaren luzera lortzea 64 alde dituzten poligono erregularren perimetroen erdiko balioa kalkulatu

Poligonoen alde kopurua	Poligono zirkunskribatuaren perimetroa (P_{zirkun})	Poligono inskribatuaren perimetroa (P_{ins})	$P_{\text{zirkun}} - P_{\text{ins}}$	$P_{\text{zirkun}} / 2r$	$P_{\text{ins}} / 2r$
4	40cm	28,28cm	11,72cm	4	2,828
6	34,64cm	30cm	4,64cm	3,464	3
16	31,83	31,21	0,62cm	3,183	3,121
32	31,52	31,37	0,15cm	3,152	3,137
64	31,44cm	31,4cm	0,04cm	3,144	3,140

Esan zein den zirkunferentziaren luzera (gutxi-gorabehera).

31,42cm

4. irudia. Arquimedesen eta adierazpen aljebraikoen metodoen arteko erlazioa

32 eta 64 alde dituzten poligonoetan, zein zenbaki lortzen da azkeneko bi zutabeetan? Zergatik?

" π " (3,14) zenbakia lortzen da, formula beste "modu" batean erabiltze delako. $\Rightarrow$

$$P = \pi \cdot r \cdot 2 \rightarrow P / (2 \cdot r) = \pi \rightarrow P = \pi \cdot r \cdot 2$$

Ikasleei jarduerak egiteko denbora zehatz bat eman zaie eta gehienek ez dute bi jarduerak bukatzeko astirik izan. Horrela, bigarren jarduera 49 ikaslek bakarrik egin dute. 3. taulan ikus daitekeen bezala, 37 ikaslek zirkuluaren azalera (edo hurbilpena) identifikatzea lortu dute eta, aurreko jardueran bezala, gehiengoak GGBtik lortutako informazioa erabiliz egin du (28 ikasle). Era berean, lehenengo jardueran gertatu den bezala, ikasleek GGBko datuak modu ezberdinean erabili dituzte, nahiz eta bigarren jarduera honetan poligono erregularren azalaren erdiko balioa kalkulatu dutenen eta ez dutenen arteko aldea ez den lehenengo jardueran bezain handia izan. Bestalde, jarduera honetan ere 9 ikaslek prozedura aljebraikoa erabili dute azaleraren neurri egokia emateko.

Azaleraren neurria gaizki identifikatu duten ikasleen artean, zirkunferentziaren luzeraren adierazpen aljebraikoa erabili dutenak nabarmentzen dira. Ikasle hauek adierazpen aljebraikoen ulermen instrumentala dutela agerikoa da, $2\pi r$ adierazpenetik ezin baita bi dimentsio (unitate karratu) dituen neurri bat lortu. Azkenik, 12 ikaslek π zenbakirako joera zirkuluaren azalera lortzeko erabiltzen den adierazpen aljebraikoan oinarrituta arrazoitu dute, adierazpen aljebraikoaren gaineko ulermen erlazonala adieraziz.

3. taula. Zirkuluaren azaleraren emaitzak

49 ikasle	37 ikasle Zirkuluaren azalera (edo hurbilekoa) lortu dute	28 ikasle GGBn egindako esploraziotik lortutako informazioa erabili dute	16 ikasle 64 alde dituzten poligono erregularren azalerak erabiltzen dituzte, baina erdiko balioa kalkulatu gabe
		9 ikasle Ez dute GGBn egindako esplorazioa erabili	12 ikasle 64 alde dituzten poligono erregularren azalaren erdiko balioa kalkulatu dute
			9 ikasle Eskatzen ez zen arren, πr^2 adierazpena erabiliz lortu dute zirkuluaren azalera
	12 ikasle Ez dute zirkuluaren azalera (edo hurbilekoa) lortu	5 ikasle Adierazpen aljebraikoa erabiltzen saiatu dira	5 ikasle $2\pi r$ adierazpena erabili dute, luzera lortzeko adierazpena hain zuzen ere
		7 ikasle Ez dira adierazpen aljebraikoa erabiltzen saiatu	7 ikasle Ez dute zenbakizko baliorik eman, ez dute erantzun edo jatorri ezezagunekoa den zenbakizko balio oker bat eman dute

Bi jardueren emaitzak alderatuta, bi jarduerak ongi egin dituzten ikasleen artean, 18k teknika berdina erabili dute bi jardueretan eta 11 ikaslek, aldiz, teknikaz aldatu dute bigarren jardueran. Hala ere, badira jarduera bat ongi eta bestea gaizki egin duten ikasleak. Alde batetik, 7 ikaslek lehenengo jarduera ongi egin arren, bigarrena gaizki egin dute eta, beste aldetik, 8 ikaslek bigarrena ongi egin dute lehenengo jarduera gaizki egin arren. Deigarria da nola lehenengo jarduera ongi eginda, bigarrena gaizki egin duten ikasleak egon diren; izan ere, lehen esan bezala, jardueren egitura berdina da eta hausnarketa eta arrazoiketa berdinak egin behar dira bietan. Lehenengoa gaizki baina bigarrena ongi egin duten ikasleen kasua, aldiz, zentzudunagoa da. Gerta liteke ikasle hauek lehenengo jardueran oraindik dinamika ulertu ez izana eta bigarren jarduera behar izana dinamikaren zentzua ulertzeko.

4. Ondorioak

Metodo mekaniko eta algoritmikotik aldentzen den ikaskuntza-egoera hau ikasleen erdiak baino gehiagok esploraziotik jasotako datuekin ongi ebatzi du. Lehenengo jardueran, 108 ikasletik 56k zirkunferentziaren luzera poligono erregularren hurbilpenetik lortu dute eta, bigarren jardueran, 49 ikasletik 28k poligonoen azalerak erabili dituzte zirkuluaren azaleraren balioa identifikatzeko. Beraz, ikaslegoaren zati handi batek metodo algoritmikoa alde batera utzi du eta esplorazioari eta arrazoiketari ekin dio. Ikasle hauek GGBko esplorazioa planteatu zaizkien galderekin erlazonatzeko gai izan dira, landu diren edukien ulermen erlazonala adieraziz.

Hala ere, koniken neurriak ongi eta gaizki identifikatu dituzten ikasle kopuruaren arteko aldea ez da oso handia izan, bereziki lehenengo jardueran. Zehazki, populazioaren %40 inguruk ez du zirkunferentziaren luzeraren neurria lortu eta, bigarren jarduera egin duten ikasleen artean, %25 inguruk azalera okerra adierazi du. Ikasle hauek ez dute GGBk eman dien informazioaren eta paperan planteatu zaizkien galderen arteko erlazioa ulertu eta, ondorioz, ez dira gai izan GGBk emandako informazioa era egokian erabiltzeko. Beraz, esplorazioan oinarritutako jarduera bat egiteko gai izan ez diren ikasleak egon dira, konpetentzia matematikoan, prozesu matematikoetan zein ulermen erlazionalean ahuleziak erakutsiz.

Zirkunferentziaren luzeraren eta zirkuluaren azaleraren neurketarekin bukatzeko, aljebra erabileraren inguruan hausnartu behar da. Jardueretan eskatzen ez zen arren, neurri egokia zein desegokia eman duten zenbait ikasleek beraien erantzuna adierazpen aljebraiko bat erabiliz kalkulatu dute. Jarrera honek agerian uzten du ikasle askok perimetro eta azaleraren neurketa adierazpen aljebraikoen erabilerarekin bakarrik lotzen dutela, eduki hauen inguruan duten ulermen instrumentala agerian utziz. Gerta liteke ikasle hauen aburuz hori izatea neurriak lortzeko modu bakarra.

Azkenik, oso ikasle gutxi izan dira Arquimedesen metodoaren eta adierazpen aljebraikoen metodoaren arteko erlazioa identifikatzeko eta arrazoiatzeko gai izan direnak. Zeregin hau egin ahal izateko, eduki eta adierazpenen gaineko ulermen erlazonala izatea ezinbestekoa da, eta ikasle gutxiak aurkeztu dute trebezia hori.

Laburbilduz, ikerketa honek konpetentzia matematikoaren garapenerako ulermen erlazonala garatzea ezinbestekoa dela agerian utzi du. Mekanizaziotik aldentzen diren esploraziozko jarduerak modu ezberdinetan ebatzi daitezke eta, gainera, hauen ebazpenerako ezinbestekoa da informazioa aztertu eta erlazonatzea eta arrazoiaketak egitea. Horrela, hori guztia egin ahal izateko, edukien ulermen erlazonala garatu behar da.

5. Etorkizunerako planteatzen den norabidea

Etorkizunari begira, alde batetik, ikerketaren populazioa handitzea onuragarria izango litzateke. Populazioa zenbat eta handiagoa izan, orduan eta adierazgarriagoak izango dira lortzen diren emaitzak; beraz, esperimentazioa DBH 2. mailako ikasle gehiagorekin egin beharko litzateke.

Beste aldetik, ikasleekin elkarrizketa pertsonalak egin beharko lirateke. Ikerketa honetan, jatorri ezezaguneko neurri okerrak eman dituzten ikasleak egon dira. Era berean, zenbait ikasleek lehenengo jarduera ongi eta bigarrena gaizki egin dute. Banan-banako elkarrizketa hauei esker, ikasleak erantzun okerra ematera zerk eramanez dituen ulertu liteke, ikasleen ezagutzak eta ulermenak modu sakonagoan ezagutuz. Informazio hau, gainera, ikaskuntza-egoera hobetzeko erabili liteke. Ikasleen erantzunen jatorria ezagutzeak, ikaskuntza-egoeraren planteamenduan edo erabili diren baliabideen diseinuan hobetu beharreko zerbait dagoen identifikatzea ahalbidetzen du.

6. Erreferentziak

Abaurrea, J. (2023). *Análisis de idoneidad en propuestas para el estudio de cónicas con GeoGebra en Educación Secundaria* [Tesis doctoral]. Universidad Pública de Navarra

Abaurrea, J., Lasa, A., & Wilhelmi M.R. (2019). Análisis didáctico de actividades para el estudio de lugares geométricos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y A. Alsina (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XXIII*, 143-152. SEIEM.

Baccaglini-Frank, A. (2021). To tell a story, you need a protagonist: how dynamic interactive mediators can fulfill this role and foster explorative participation to mathematics discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 106, 291-312. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10009-w>

- Beltrán-Pellicer, P., & Alsina, Á. (2022). La competencia matemática en el currículo español de Educación Primaria. *Márgenes, Revista de Educación de la Universidad de Málaga*, 3(2), 31-58. <http://dx.doi.org/10.24310/mgnmar.v3i2.14693>
- Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos.
- Bray, A., & Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research. A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, 114, 255-273. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004>
- Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria*. <https://matematicas.uclm.es/cemat/wp-content/uploads/bases2021.pdf>
- Foley, G. D., Budhathoki, D., Thapa, A. B., & Aryal, H. P. (2023). Instructor perspectives on quantitative reasoning for critical citizenship. *ZDM – Mathematics Education*, 55(5), 1009-1020. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01520-4>
- Freyre, M., & Mántica, A. M. (2017). Constatación empírica y uso de propiedades para la validación de conjeturas utilizando GeoGebra. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 95, 107-121.
- Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2013). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 2(1), 52-64.
- Nafarroako Gobernua (2022a). 67/2022 Foru Dekretua, ekainaren 22koa, Nafarroako Foru Komunitateko Lehen Hezkuntzaren etapako irakaskuntzen curriculumaz ezartzen duena. *Nafarroako Aldizkari Ofiziala*, 01-07-2022, 130.
- Nafarroako Gobernua (2022b). 71/2022 Foru Dekretua, ekainaren 29koa, Nafarroako Foru Komunitateko Derrigorrezko Bigarren Hezkuntzaren etapako irakaskuntzen curriculumaz ezartzen duena. *Nafarroako Aldizkari Ofiziala*, 04-08-2022, 155.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77(1), 20-26.
- Smit, R., Hess, K., Taras, A., Bachmann, P., & Dober, H. (2023). The role of interactive dialogue in students' learning of mathematical reasoning: A quantitative multi-method analysis of feedback episodes. *Learning and Instruction*, 86, 101777. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2023.101777>

7. Eskerrak eta oharrak

Lan hau 2023an aurkeztutako “Análisis de idoneidad en propuestas para el estudio de cónicas con GeoGebra en Educación Secundaria” (Abaurrea, 2023) tesitik eratorria da. Tesi hau matematikaren didaktikaren arloan kokatzen da eta Nafarroako Unibertsitate Publikoa gauzatu zen Miguel Rodríguez Wilhelmi zuzendariaren eskutik.